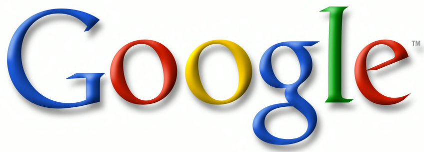


Leitfaden

und

Aufgabensammlung für den Unterricht

in der

angewandten Mechanik.

Von

A. Föppl,

Ing., Dr. phil.,
Oberlehrer a. d. städt. Gewerbeschule in Leipzig.

Zweites Heft.



Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1890.

Vorwort.

Zur Bearbeitung dieses Leitfadens wurde ich durch den Wunsch veranlaßt, meinem Unterrichte an der Leipziger Gewerbeschule ein in jeder Hinsicht passendes Lehrbuch zugrunde legen zu können.

Die von mir gewählte und durch langjährige Lehrerfahrung erprobte Darstellung der Elementarmechanik weicht, wie der Kundige schon bei flüchtigem Durchblättern der beiden Hefte finden wird, in vielen Punkten von der herkömmlichen ab. Ich glaube hoffen zu dürfen, daß diese Abweichungen bei einer Erprobung im Unterrichte als wirkliche Verbesserungen Anerkennung finden werden.

Zunächst ist bei der Bearbeitung auf die Bedürfnisse der gewerblichen oder technischen Lehranstalten mittleren Ranges Rücksicht genommen worden. Ich vermute indessen, daß das Werkchen auch den Lehrern der Physik an Gymnasien und Realschulen, welche heute allgemein bestrebt sind, den Unterricht durch die Heranziehung von Beispielen aus den technischen Anwendungen zu beleben, vielfach willkommen sein wird.

Etwaige Anfragen, welche sich mit Rücksicht auf die knappe oder ungewohnte Fassung mancher Stellen nötig machen könnten, werde ich mit größter Bereitwilligkeit beantworten und Anregungen in bezug auf etwa wünschenswert erscheinende Änderungen für den Fall einer weiteren Auflage mit bestem Danke entgegennehmen.

Der Verlagshandlung spreche ich für die geschmackvolle Ausstattung des Buches meine volle Anerkennung aus.

Leipzig, im April 1890.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Mechanik des materiellen Punktes und der starren Körper. II.

Erstes Kapitel.

Centrifugalkraft.

1. Ein in Bewegung befindlicher mat. P., an dem keine Kraft wirkt (oder an dem alle angreifenden Kräfte im Gleichgewichte stehen) führt nach dem Gesetze der Trägheit eine geradlinige, gleichförmige Bewegung aus. Geradlinig bleibt die Bewegung auch dann noch, wenn eine resultierende Kraft an dem mat. P. wirkt, welche gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist mit der Geschwindigkeit desselben. Die hierher gehörenden Bewegungserscheinungen sind im ersten Teile ausführlich behandelt.

Jetzt haben wir uns mit dem Falle zu beschäftigen, daß eine Kraft an dem mat. P. angreift, welche senkrecht zur Richtung seiner Geschwindigkeit steht. Auf diesen und den bereits früher behandelten Fall läßt sich nämlich jeder andere dadurch zurückführen, daß man eine beliebig gerichtete Kraft in zwei Komponenten zerlegt, von denen eine in die Richtung der Bewegung fällt, während die andere dazu senkrecht steht.

2. Aus dem Grundsatze, daß jede Kraft unabhängig von allen Nebenumständen eine in ihre Richtung fallende gleichförmig beschleunigte Bewegung des von ihr betroffenen mat. P. zur Folge hat, welche sich mit den aus andern Ursachen hervorgehenden Bewegungen zu einer resultierenden Bewegung vereinigt (I, § 60, Prinzip der Superposition) geht unmittelbar hervor, daß die senk-

recht zur Bewegungsrichtung stehende Kraft eine Krümmung der Bahn des bewegten Punktes hervorbringt.

Ein einfaches Beispiel hierfür liefert der schiefe Wurf im luftleeren Raume. Im höchsten Punkte seiner Bahn bewegt sich der geworfene Körper in horizontaler Richtung, während die einzige an ihm wirkende Kraft senkrecht nach abwärts gerichtet ist und eine Krümmung der Bahn bewirkt. In jedem andern Punkte der Bahn läßt sich die Schwerkraft in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine verzögernd (im aufsteigenden) bezw. beschleunigend (im absteigenden Aste), die andere aber richtungsändernd wirkt.

3. Es sei jetzt vorausgesetzt, daß die auf den bewegten Punkt wirkende Kraft nicht nur im Anfange, sondern auch in jedem folgenden Augenblicke senkrecht zur Bewegungsrichtung steht. Dazu gehört, daß sich die Richtung der Kraft fortwährend und in demselben Maße ändert wie die Richtung der Geschwindigkeit des bewegten Punktes.

Lehrsatz. Unter dieser Voraussetzung ändert sich die Geschwindigkeit nur der Richtung, aber nicht der Größe nach.

Anl. z. Bew. In Fig. 1a sei AB das zur Betrachtung ausgewählte Stück der Bahn, die Geschwindigkeiten seien v_0 in A, v_1 in B und v in irgend einem Zwischenpunkte C. Überall sei die Kraft $P \perp v$. In jedem Zeitelemente erzeugt P eine in ihre Richtung fallende Geschwindigkeitskomponente, welche mit der bereits vorhandenen Geschwindigkeit graphisch zu summieren ist. In Fig. 1b ist dies ausgeführt. Das Summationspolygon wird (wegen $P \perp v$) ein Kreissektor und daher $v = v_0 = v_1$.

Fig. 1a.

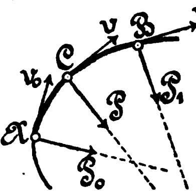
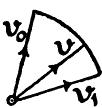


Fig. 1b.



4. Die Bahn des bewegten Punktes sei jetzt ein Kreis. Da jeder Durchmesser eine Symmetrieachse des Kreises ist, muß die ablenkende Kraft P fortwährend ihre Größe behalten. Die Beschleunigung, welche sie dem mat. P. erteilt, sei G, dann ist nach I, § 56

$$G = g \cdot \frac{P}{Q} = \frac{P}{M},$$

wenn Q das Gewicht des mat. P., g die Beschleunigung der Schwere und M die Masse des mat. P. bedeuten.

Lehrsatz. Das Quadrat der Geschwindigkeit eines gleichförmig rotierenden mat. P. ist gleich dem Produkte aus dem Radius des Bahnkreises und der Beschleunigung der ablenkenden Kraft.

Erster Bew. Zur Betrachtung sei die Bewegung längs des Halbkreises AB (Fig. 2a) ausgewählt. Die Kraft P bewirkt, daß die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in die entgegengesetzte aber gleich große v_1 übergeht. In irgend einem Punkte C denke man sich die Beschleunigung G in die Komponenten G_1 und G_2 zerlegt, dann ist $G_1 = G \cos\alpha$; $G_2 = G \sin\alpha$. Fig. 2b zeigt die der Fig. 1b entsprechende Geschwindigkeitsfigur (von Hamilton der Hodograph genannt). Die Beschleunigungskomponenten G_2 vernichten sich in ihrer Gesamtwirkung, weil sie im unteren Viertelkreise entgegengesetzte Richtung haben wie im oberen, dagegen addieren sich die Wirkungen aller G_1. Wir erhalten (I, § 26)

Fig. 2a.

Fig. 2b.

$$2v = \sum G_1 \cdot \Delta t = \sum G \cos\alpha \, \Delta t.$$

Bezeichnet man das im Zeitelemente Δt zurückgelegte Bahnelement mit Δs, so ist (I, § 12)

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

und man erhält, da G und v konstant sind,

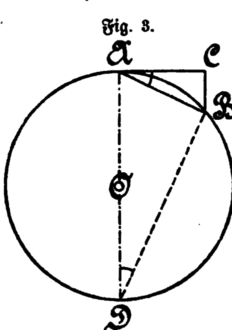
$$2v^2 = G \cdot \sum \Delta s \cdot \cos\alpha.$$

$\Delta s \cdot \cos\alpha$ ist aber eine Projektion von Δs auf den Durchmesser des Halbkreises und die Summe ergiebt den Durchmesser selbst; daraus folgt

$$v^2 = G \cdot r.$$

Zweiter Bew. In Fig. 3 sei O Krsmp., AC eine Tang., $BC \parallel AD$, dann ist $\sphericalangle\, CAB = \sphericalangle\, ADB$ (Peripheriewinkel)

und $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABD$ (Rechte), daher $\triangle ACB \sim \triangle ABD$; demnach



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AB} \text{ oder } AB^2 = BC \cdot AD.$$

Nun sei AB ein sehr kleines (unendlich kleines) Stück des Bahnkreises. Man kann dann die Sehne gleich dem Bogen setzen, also

$$AB = v \cdot \Delta t$$

und BC gleich dem Wege in der Richtung der Kraft P, also (I, § 24)

$$BC = G \cdot \frac{\Delta t^2}{2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte erhält man wie früher

$$v^2 = G \cdot r.$$

5. Die Kraft P, welche man in jedem Augenblicke in der Richtung des Radius auf den mat. P. ausüben muß, damit er gleichförmig rotiert, heißt die Centripetalkraft. Die Reaktion derselben, also diejenige Kraft, welche der rotierende Punkt auf die mit ihm in Verbindung stehenden Körper überträgt (I, § 39) heißt die Centrifugalkraft. Sie ist jener gleich und entgegengesetzt gerichtet.

Bezeichnet man sie jetzt mit C, so folgt aus § 4

$$C = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = M \frac{v^2}{r}.$$

6. Die für C gegebene Formel bleibt auch dann noch anwendbar, wenn die Bahn eine beliebig gekrümmte Kurve ist. Ein sehr kleines Stück einer solchen, das der bewegliche Punkt in einem bestimmten Zeitteilchen durchläuft, kann nämlich stets als ein sehr kleiner Kreisbogen betrachtet werden. Unter r ist dann der Radius des letzteren, der sogenannte Krümmungshalbmesser der krummen Linie an der betrachteten Stelle, zu verstehen.

7. Die Centrifugalkraft, welche ein rotierender Körper ausübt, ergiebt sich als die Resultierende aller Einzelwirkungen. In vielen Fällen ist r und daher auch v für alle mat. P. des Körpers von nahezu gleicher Größe. Ist überdies die Ausdehnung des Körpers

in der Bahnrichtung klein im Verhältnisse zum Radius r, so daß die von sämtlichen mat. P. herrührenden Kräfte C nahezu parallel gerichtet sind, dann gilt die Formel des § 5 auch für die resultierende Centrifugalkraft, wenn unter Q das Gewicht des ganzen Körpers und unter v und r Mittelwerte verstanden werden.

Aufg. 1. Ein Körperchen von 1 ^{gr} Gewicht ist am Umfange einer rotierenden Scheibe von 0,8 ^{m} Radius festgeklebt. Wieviel Umdrehungen muß die Scheibe in der Minute machen, um das Körperchen fortzuschleudern, wenn das Klebmittel eine Zugspannung von 8 ^{gr} übertragen kann? In welcher Richtung fliegt es fort?

Aufg. 2. Um wieviel wird die Beschleunigung der Schwere am Äquator durch die Rotation der Erde vermindert? Wie schnell müßte die Erde rotieren, wenn die Schwere am Äquator durch die Centrifugalkraft aufgehoben werden sollte?

Aufg. 3. Um wieviel höher muß die äußere Schiene eines Eisenbahngeleises in einer Kurve von 300 ^{m} Radius liegen, damit die an einem Eisenbahnwagen wirkende Resultierende aus Schwere und Centrifugalkraft senkrecht auf der Verbindungslinie der Schienenoberkanten steht (um ein Anpressen und Schleifen des eihen Radflantsches längs der Schiene zu vermeiden) bei einer mittleren Geschwindigkeit von 12 ^{m} pro Sek.? (Spurweite = 1,435 ^{m}.)

Aufg. 4. Ein Schwungrad mit 8 Armen hat einen Ring von 450 ^{qcm} Querschnittfläche und 1,5 ^{m} mittlerem Radius. Wie groß ist a) die von einem Arme aufzunehmende Centrifugalkraft unter der Annahme, daß der Zusammenhang des Ringes nur durch die Arme aufrecht erhalten wird? Wie groß ist b) die im Ringe auftretende Zugspannung unter der Annahme, daß die Arme durch die Centrifugalkraft gar nicht beansprucht werden? (Vgl. I, § 216.) Ermittele c) das Verhältnis, nach dem sich die Centrifugalkraft auf die Arme und auf die im Ringe auftretenden Spannungen verteilt. (Dazu muß der Armquerschnitt bekannt sein; die elastische Verlängerung des Armes ist gleich der Zunahme des Radius des Schwungringes, beide erfahren daher die gleiche spezifische Zugspannung, woraus sich das gesuchte Verhältnis ergiebt.)

Aufg. 5. Wieviel Touren darf eine gußeiserne Trommel (Centrifuge) von 2 ^{m} Durchmesser machen, ohne daß die Gefahr eines Bruches infolge der Wandspannungen eintritt, wenn sie leer läuft?

Aufg. 6. Wie heißt der Ausdruck für die Centrifugalkraft, wenn man in derselben an Stelle von v die Winkelgeschwindigkeit u einführt a) wenn letztere in Touren pro Minute gerechnet ist; b) wenn u angiebt wievielmal der Radius in dem pro Sekunde durchlaufenen Bogen enthalten ist? (Winkelgeschwindigkeit in Bogenmaß.)

8. Wenn die in § 7 genannten Voraussetzungen nicht mit hinreichender Genauigkeit zutreffen, läßt sich die von einem rotierenden Körper ausgeübte Centrifugalkraft in folgender Weise berechnen.

Fig. 4 sei die Projektion des rotierenden Körpers auf eine Ebene, die senkrecht zur Drehachse steht und O die Projektion der letzteren. Man lege zunächst zwei radiale Schnitte $O1$ und $O2$, die einen so kleinen Winkel miteinander bilden, daß man die Centrifugalkräfte an den dazwischen gelegenen Punkten als parallel untereinander ansehen kann. Aus dem hierdurch gebildeten Sektor grenze man ferner ein Körperstückchen vom Gewichte ΔQ ab, dessen mat. P. den mittleren Abstand r von der Drehachse haben. Für ΔQ läßt sich dann die Centrifugalkraft aus der Formel des § 5 berechnen. Die von dem ganzen Sektor $1O2$ herrührende Centrifugalkraft ergiebt sich dann durch eine Summierung über alle in demselben enthaltenen ΔQ zu

Fig. 4.

$$\sum \frac{\Delta Q}{g} \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Bezeichnet man die Tourenzahl pro Minute mit n, so ist (vgl. Aufg. 6) $v = \frac{\pi r n}{30}$. Die Summe geht daher, wenn man die konstanten Faktoren heraushebt, über in

$$\frac{\pi^2 n^2}{900 g} \sum \Delta Q \cdot r.$$

Der verbleibende Summenwert stellt aber das statische Moment des Sektorengewichtes unter Voraussetzung horizontaler Stellung der Mittelebene des Sektors in Bezug auf O dar. Er läßt sich daher ersetzen durch das Produkt $Q_s \cdot s$, wenn Q_s das Sektorgewicht und s den Abstand des Schwerpunktes von O bedeutet. Wir finden so für die vom Sektor ausgeübte Centrifugalkraft

$$\frac{\pi^2 n^2}{900 g} \cdot Q_s \cdot s.$$

Die vom ganzen Körper ausgeübte Centrifugalkraft ergiebt sich hieraus ohne Schwierigkeit durch graphische Summierung der von den einzelneu Sektoren herrührenden Wirkungen.

Aufg. 7. Wie heißt die Lösung der Aufg. 5, wenn die rotierende Trommel vollständig mit Wasser gefüllt ist und die Wandstärke 30 ^{mm} beträgt?

Anl. z. L. Die von jedem Sektor herrührende Centrifugalkraft überträgt sich im vorliegenden Falle (weil das Wasser keine Zugspannungen aufnimmt) auf den entsprechenden Teil der Trommelwand. Für s ist hier $^2/_3$ des Trommelhalbmessers zu setzen (I, § 131). Man rechnet daraus leicht auf Atmosphären um und benutzt die Gl. in I, § 216.

Aufg. 8. Eine schmiedeeiserne Trommel von 1,5 ^{m} Durchmesser ist mit einer Flüssigkeit vom spezif. Gewichte 1,2 gefüllt und soll 400 Touren machen. Wie stark muß die Trommelwand gemacht werden, wenn wie in den vorhergehenden Fällen auf die Versteifung, welche etwa durch radiale Wände oder durch die Trommelböden herbeigeführt wird, keine Rücksicht genommen wird?

9. Wenn die Drehachse O (Fig. 4) im rotierenden Körper liegt, entsprechen den Radialschnitten $O1$ und $O2$ zwei zu verschiedenen Seiten von O liegende Sektoren, deren Centrifugalkräfte entgegengesetzt gerichtet sind. Die Ermittelung der Resultierenden kann aber ganz in der oben beschriebenen Weise erfolgen.

Aufg. 9. Eine kreisrunde Scheibe von 80 ^{cm} Durchmesser und 100 ^{kgr} Gewicht ist excentrisch auf einer Welle aufgekeilt, die 200 Touren macht. Ermittle (auf graphischem Wege) die Größe der Centrifugalkraft, welche sie auf die Welle überträgt, wenn die Excentrizität a) 10 ^{cm}, b) 40 ^{cm} beträgt.

10. Unter gewissen Umständen halten sich die von dem rotierenden Körper geäußerten Centrifugalkräfte im Gleichgewicht, z. B. wenn ein Ring oder eine Scheibe von regelmäßiger Gestalt um ihren Mittelpunkt rotieren. In jedem starren Körper kann man gerade Linien angeben, für welche dies zutrifft, wenn sie als Drehachsen genommen werden. Sie heißen die freien Achsen des Körpers.

Lehrsatz. Die freien Achsen eines starren Körpers sind Schwerlinien desselben.

Anl. z. Bew. Man wähle irgend eine Schwerlinie als Drehachse und projiziere den Körper auf eine zu ihr senkrechte Ebene. In der Ebene ziehe man durch die Projektion des Schwerpunktes O zwei zu einander senkrechte Linien OX und OY. Die Centrifugalkraft, welche an irgend einem Körperteilchen vom Gewichte ΔQ

wirkt, zerlege man in zwei Komponenten nach diesen Richtungen. Die X-Komponente ist (vgl. § 8)

$$\frac{\pi^2 n^2}{900\, g} \cdot \varDelta Q \cdot x.$$

Die Bedingung, daß die algebraische Summe dieser Projektionen verschwindet, fällt aber zusammen mit der Bedingung, daß die gewählte Drehachse eine Schwerlinie sei.

11. Der Lehrsatz läßt sich aber nicht umkehren. Im allgemeinen ist vielmehr eine Schwerlinie keine freie Achse des Körpers, sondern die an letzterem wirkenden Centrifugalkräfte sind einem Kräftepaare äquivalent. Dagegen ist die Schwerlinie immer dann eine freie Achse, wenn der Körper eine zu ihr senkrecht stehende Symmetrieebene besitzt (Beweis!). Aus dem gleichen Grunde ist die Schwerlinie einer irgendwie gestalteten Scheibe, welche senkrecht zur Ebene derselben steht, eine freie Achse.

12. Die Lehre von den freien Achsen ist von Wichtigkeit für die Anwendungen im Maschinenbau. Man muß sich stets bemühen, die schnell rotierenden Körper so zu gestalten, daß ihre Rotationsachse eine freie Achse ist, weil sonst die ihre Richtung fortwährend wechselnden Resultierenden der Centrifugalkräfte oder das ihnen äquivalente Kräftepaar ein Rütteln des rotierenden Körpers in den Lagern hervorbringt.

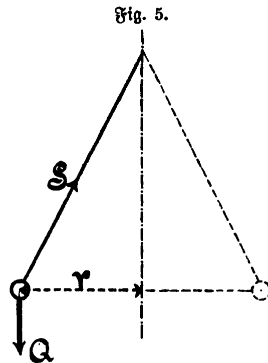
Aufg. 10. Ein starrer Körper ist aus zwei gleich schweren Kugeln und einer (nahezu) gewichtslosen Verbindungsstange zusammengesetzt. a) Welches sind die freien Achsen? b) Wie groß ist das statische Moment des resultierenden Kräftepaares für eine Schwerlinie, die mit der Stabrichtung einen Winkel von 45^0 einschließt, wenn die Kugeln je 40^{kgr} wiegen und $1{,}2^{\text{m}}$ Abstand von einander haben, während der Körper 150 Umdrehungen in der Minute um die Schwerlinie macht?

13. Ein Centrifugalpendel besteht aus einem gewichtslosen Faden, an dem ein kleiner schwerer Körper (mat. P.) aufgehängt ist, welcher die ihm einmal erteilte gleichförmige Rotation um die durch den Aufhängepunkt gehende senkrechte Achse unverändert so lange fortsetzt, als nicht äußere (Luft-) Widerstände ihn daran hindern.

Die Fadenspannung S und das Gewicht Q setzen sich zu

einer Resultierenden zusammen, welche die Centripetalkraft der Bewegung bildet. Es ergiebt sich daraus, daß jedem „Ausschlage“ r des Pendels ein genau bestimmter Wert der Umfangsgeschwindigkeit und daher auch der Umlaufszeit entspricht.

Fig. 5.



Aufg. 11. Ermittle diesen Zusammenhang zwischen v und r.

Aufg. 12. Leite die Formel für die Umlaufszeit ab. Unter welchen Umständen läßt sich die letztere als unabhängig von r ansehen und durch die Formel

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(wo l die Pendellänge ist) näherungsweise ausdrücken?

14. Die Centrifugalregulatoren, erfunden von J. Watt (geb. 1736, gest. 1819) finden häufige Anwendung, besonders im Dampfmaschinenbau. Es giebt eine große Zahl verschiedener Konstruktionen, deren Berechnung aber fast immer nach denselben Grundzügen erfolgen kann.

Fig. 6a.

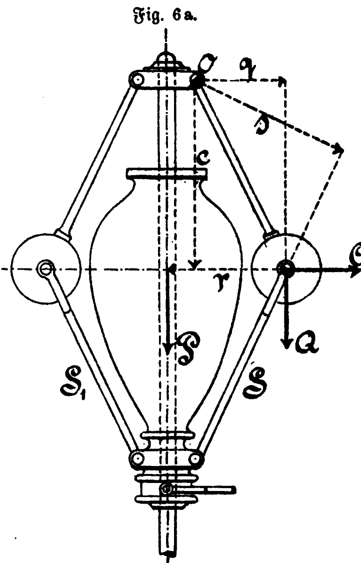


Fig. 6b.



Wir betrachten als Beispiel den häufig verwendeten Porter'schen Regulator, Fig. 6a. Das mit der Regulatorspindel durch Prismenpaar verbundene Gegengewicht P lastet auf den unteren Enden der Stangen S und S_1 und sucht dieselben nach abwärts zu ziehen. An jeder Kugel setzt sich das Gewicht Q

mit den von den beiden Stangen übertragenen Kräften zu einer Resultierenden zusammen, welche bei gleichförmiger Rotation die Centripetalkraft bildet. Denkt man sich zu diesen Kräften eine der letzteren entgegengesetzt gleiche, also die Centrifugalkraft C hinzugefügt, so muß diese mit den thatsächlich auf die Kugel übertragenen Kräften im Gleichgewichte stehen.

15. Ein Regulator sei in irgend einer Stellung gegeben, man soll ermitteln wieviel Touren die Regulatorspindel machen muß, damit der Regulator diese Stellung beibehalte. Zur Lösung dieser grundlegenden Aufgabe zerlege man zunächst P in die Stabkräfte S und S_1 (Fig. 6b). Dann wähle man den Drehpunkt O der oberen Stange als Momentenpunkt und schreibe die Momentengleichung an

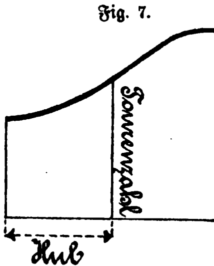
$$C \cdot c = S \cdot s + Q \cdot q.$$

Aus ihr läßt sich die einzige Unbekannte C berechnen. Nach § 5 ergiebt sich daraus v und schließlich die gesuchte Tourenzahl.

16. Gewöhnlich wird die Aufgabe etwas anders gestellt. Man soll z. B. das erforderliche Gegengewicht P oder das Verhältnis $P:Q$ suchen, wenn die Tourenzahl und alles übrige gegeben ist. Die Momentengleichung ist dann nur nach einer anderen Unbekannten aufzulösen.

17. Wenn die Tourenzahl steigt hebt sich der Regulator, im anderen Falle sinkt er. Man konstruiert ihn so, daß er bei der verlangten normalen Geschwindigkeit eine gewisse mittlere Lage einnimmt. Die Kenntnis dieser mittleren Lage genügt aber nicht, um die Wirksamkeit des Regulators genau beurteilen zu können.

Fig. 7.



Zu diesem Zwecke berechne man für die höchste und tiefste Lage sowie für mehrere Zwischenlagen die entsprechenden Tourenzahlen nach § 15 und zeichne ein Diagramm (Fig. 7), indem man auf der Grundlinie den Regulatorhub und senkrecht dazu die entsprechenden Tourenzahlen in irgend einem Maßstabe abträgt. Je flacher die erhaltene Linie verläuft, desto empfindlicher ist der Regulator. Ein Regulator von sehr großer Empfindlichkeit

heißt astatisch. Die Diagrammlinie verläuft bei demselben horizontal (oder nahezu horizontal) oder fällt nach rechts.

Je nach dem besonderen Zwecke verlangt man, daß der Regulator mehr oder weniger empfindlich sei.

18. An Stelle des Gegengewichtes P kann auch eine Spiralfeder treten, oder die Richtungslinien der oberen Arme können sich kreuzen, oder auch die Kugeln C können in der Verlängerung der unteren Arme nach oben hin aufgesetzt sein. Man erhält hierdurch andere Konstruktionen, deren Berechnung leicht in ähnlicher Weise wie diejenige des Porter'schen Regulators durchgeführt werden kann. Zum Zwecke einer schärferen Berechnung würden noch die Centrifugalkräfte und Gewichte der Stangen zu berücksichtigen sein.

19. Ein Rotationskörper rotiere um seine Achse. Nach außen hin ist die Bewegung desselben zunächst nicht erkennbar, er scheint in Ruhe zu sein. Der Einwirkung äußerer Kräfte gegenüber verhält er sich aber anders als ein ruhender Körper, er sucht die Richtung seiner Rotationsachse beizubehalten. Man nennt die Kraft, welche man aus diesem Grunde zur Herbeiführung irgend einer Bewegung aufwenden muß, die Gyralkraft.

Die Gyralkraft ist nichts anderes als eine Resultierende von Centripetalkräften. So lange nämlich ein Körper um eine feststehende freie Achse rotiert, stehen die an ihm wirkenden Centrifugalkräfte im Gleichgewicht. Sobald man aber dem Gestell, in welchem die freie Achse gelagert ist, irgend eine Bewegung erteilt, trifft dies im allgemeinen nicht mehr zu. Jeder mat. P. führt eine aus der Rotation und der Gestellbewegung resultierende Bewegung aus und die an ihm anzubringende Centripetalkraft richtet sich nach der Geschwindigkeit und Bahnkrümmung der letzteren. Die Resultierende aus allen diesen Centripetalkräften ist die Gyralkraft. Sie ist abhängig von der Gestalt und Tourenzahl des rotierenden Körpers und von der Art der Gestellbewegung.

Aus dem Bestreben starrer Körper zur Erhaltung ihrer Drehachse erklärt sich eine Reihe von Erscheinungen, wie die Kreiselbewegung und die relative Drehung des Foucault'schen Pendels gegen den Erdboden. Für die technischen Anwendungen haben diese Betrachtungen aber bisher keine größere Wichtigkeit erlangt.

Das Pendel.

20. Die Lehre von der Pendelbewegung ist für die technische Mechanik von geringerer Bedeutung als für die Physik. Sie soll hier nur kurz besprochen werden.

Lehrsatz. So lange der Ausschlag gering bleibt, braucht ein mathematisches Pendel nahezu ebensoviel Zeit um in den höchsten Punkt des Schwingungsbogens zurückzukehren, als wenn es an Stelle der ebenen Schwingung eine kreisförmige als Centrifugalpendel ausgeführt hätte.

Anl. z. Bew. Man ziehe die Sehne des Schwingungsbogens, welche zugleich einen Durchmesser des Schwingungskreises des Centrifugalpendels bildet und projiziere den die Pendelschwingung ausführenden mat. P. in beiden Fällen auf die gezogene Hilfslinie, ebenso die in jedem Falle an ihm wirkenden Kräfte. So lange der Ausschlag gering ist, bleiben die Kräfteprojektionen nahezu einander gleich und es müssen sich daher auch annähernd die Projektionen des mat. P. in beiden Fällen gleich bewegen, woraus der Satz folgt.

Anm. Die Fadenspannung behält beim Centrifugalpendel unverändert ihren Wert bei, beim gemeinen Pendel ist sie im höchsten Punkte etwas kleiner als bei jenem und wächst dann bis zum tiefsten Punkte, wo sie diejenige des Centrifugalpendels übersteigt, allmählich an. Wegen dieser allmählichen Änderung der Fadenspannung gilt die Gl.

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

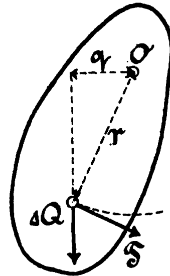
für eine einfache Schwingung (vgl. Aufg. 12) beim gewöhnlichen Pendel nicht mit derselben Genauigkeit wie beim Centrifugalpendel für die entsprechende Halbkreisbahn. So lange der Ausschlag nicht über etwa 5° steigt, kann man aber von einer Korrektion unter gewöhnlichen Umständen absehen.

21. Die Berechnung der Schwingungsdauer des physischen Pendels läßt sich auf die des mathematischen Pendels zurückführen. In Fig. 8 sei O die Projektion der Drehachse, $\varDelta Q$ das Gewicht eines im Abstande r von jener gelegenen Körperstückchens. Denken wir uns für einen Augenblick die ganze übrige Masse verschwindend klein gegen $\varDelta Q$, so haben wir ein mathematisches Pendel. An $\varDelta Q$ würde dann eine resultierende Kraft wirken, die sich in eine Centripetalkomponente C und eine rechtwinklig dazu stehende Tangentialkomponente T zerlegen läßt. Von der Größe der letzteren

hängt die Beschleunigung von ΔQ in der Bewegungsrichtung und daher die Geschwindigkeit ab, die ΔQ im Laufe der Bewegung erlangt und damit auch die Schwingungsdauer.

Wegen des starren Zusammenhanges von ΔQ mit den übrigen Teilen des Pendels muß es aber in jedem Augenblicke dieselbe Winkelgeschwindigkeit und daher auch die gleiche Winkelbeschleunigung besitzen wie jene. Es treten infolge davon innere Kräfte auf, deren Resultierende an ΔQ wir in die Centripetalkomponente T_i und in die Centripetalkomponente C_i zerlegen.

Fig. 8.



Da alle inneren Kräfte, die an sämtlichen mat. P. eines starren Körpers wirken, unter sich im Gleichgewichte stehen (I, § 106), erhalten wir durch Anwendung des Momentensatzes in Bezug auf O

$$\sum T_i \cdot r = 0,$$

wenn die Summe über alle Körperteilchen erstreckt wird, während

$$\sum T \cdot r = \sum \Delta Q \cdot q$$

ist. Die Beschleunigung von ΔQ in der Bewegungsrichtung hängt nun von der algebraischen Summe der Tangentialkomponenten $T + T_i$ ab und ist (I, § 56)

$$G = \frac{T + T_i}{\Delta Q} \cdot g.$$

Damit die Winkelbeschleunigung für jeden mat. P. denselben Wert besitze, muß G proportional r und daher $\frac{G}{r}$ konstant sein. Aus der vorigen Gleichung erhalten wir

$$\frac{G}{r} \cdot r^2 \frac{\Delta Q}{g} = Tr + T_i r.$$

Denkt man sich diese Gleichung für jedes Körperteilchen ΔQ aufgestellt und alle addiert, so wird

$$\frac{G}{g \cdot r} \cdot \sum r^2 \Delta Q = \sum Tr + \sum T_i r = \sum \Delta Q \cdot q.$$

Für $\Sigma \Delta Q \cdot q$ kann man das statische Moment S des im Schwerpunkte konzentrierten Pendelgewichtes Q setzen. $\Sigma r^2 \Delta Q$ wird

das polare Trägheitsmoment des Pendels (I, § 246) genannt und sei mit J bezeichnet. Dann ist

$$G = gr \cdot \frac{S}{J}.$$

22. Man kann jetzt leicht ein mathematisches Pendel angeben, das in jedem Augenblicke dieselbe Winkelbeschleunigung erfährt und daher gleiche Schwingungsdauer besitzt, wie das betrachtete physische Pendel. Die Länge l desselben wird die reduzierte Pendellänge des letzteren genannt.

Man denke sich nämlich durch den Schwerpunkt des physischen Pendels von O aus den Faden eines mathematischen Pendels von der Länge l gelegt. Die Beschleunigung G', welche dieses in der Bewegungsrichtung erfährt, ergiebt sich leicht

$$G' = g\frac{l'}{l},$$

wenn unter l' die Horizontalprojektion von l verstanden wird. Bezeichnet man ebenso mit s den Abstand des Schwerpunktes des physischen Pendels von der Drehachse und mit s' die Horizontalprojektion desselben, so ist auch

$$G' = g\frac{s'}{s}.$$

Das mathematische Pendel hat die gleiche Winkelbeschleunigung wie das physische, wenn

$$\frac{G'}{l} = \frac{G}{r}$$

ist. Setzt man die für G und G' gefundenen Werte ein und berücksichtigt, daß $S = Qs'$ ist, so erhält man für die reduzierte Pendellänge

$$l = \frac{J}{Q\,.\,s}.$$

Man findet nun die Schwingungsdauer eines physischen Pendels, indem man diejenige des mathematischen von der reduzierten Pendellänge berechnet (§ 20).

Anm. Die Gleichung $\Sigma T_i \cdot r = 0$ spricht das Prinzip von d'Alembert (geb. 1717, gest. 1783) aus. Sie ist aber, wie bereits bemerkt, nur eine einfache Folgerung aus dem Prinzipe der Gleichheit von Aktion und Reaktion.

Zweites Kapitel.

Lebendige Kraft.

23. Unter der lebendigen Kraft eines mit der Geschwindigkeit v bewegten mat. P. vom Gewichte Q oder der Masse M versteht man den Ausdruck

$$Q \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad M \frac{v^2}{2}.$$

Gleichbedeutend damit ist die neuerdings vielfach vorgezogene Bezeichnung „kinetische Energie".

Anm. Leibniz (geb. 1646, gest. 1716), welcher den Begriff in die Mechanik einführte, verstand darunter ursprünglich das Doppelte des angegebenen Wertes. In älteren Schriften findet man den Begriff noch vielfach in dieser Bedeutung gebraucht. Seit den bahnbrechenden Arbeiten Poncelets (geb. 1788, gest. 1868), welche die heutige Energetik vorbereiteten, wird aber unter lebendiger Kraft allgemein der oben angegebene Wert verstanden.

24. Lehrsatz. Wenn sich ein mat. P. unter dem Einflusse einer Kraft bewegt, so ist die von letzterer geleistete Arbeit jederzeit gleich dem Zuwachse der lebendigen Kraft des mat. P.

Anl. z. Bew. 1. Fall. Die Kraft sei gleich Null. Dann ist auch die Arbeit gleich Null und die lebendige Kraft ändert sich nicht, weil die Geschwindigkeit konstant bleibt. (Gesetz der Trägheit.)

2. Fall. Die Kraft stehe in jedem Augenblicke senkrecht zur Bewegungsrichtung. Auch hier ist die Arbeit gleich Null und die lebendige Kraft bleibt ungeändert. (§ 3.)

3. Fall. Die Kraft P sei gleichgerichtet mit der Geschwindigkeit und behalte ihre Größe und Richtung unverändert bei. Die Bewegung ist gleichförmig beschleunigt. Die Beschleunigung derselben ist

$$G = \frac{P}{Q} \cdot g.$$

Setzt man diesen Wert in die vierte Formel für die gleichförmig beschleunigte Bewegung (I, § 24) ein, so erhält man

$$Ps = Q \frac{v^2 - v_0^2}{2g}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung giebt die von P geleistete Arbeit, die rechte Seite den Zuwachs an lebendiger Kraft an.

In derselben Weise erledigt sich der 4. Fall, bei dem die Kraft der Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet ist. (Die Arbeit ist hier negativ.)

5. Fall. Die Größe der Kraft P ändere sich während der Bewegung, während ihre Richtung mit derjenigen der Geschwindigkeit zusammenfällt. Die Bewegung ist hier ungleichförmig beschleunigt. Man betrachte die Bewegung innerhalb eines so kleinen Zeitteilchens, daß sich P innerhalb desselben nicht merklich ändert. Der Fall ist damit auf den 3. Fall zurückgeführt. Wenn aber der Satz in jedem kleinsten Zeitteilchen gilt, trifft er auch für jede endliche Bewegung zu.

6. Fall. Die Kraft sei in jedem Augenblicke von beliebiger Größe und Richtung. Zerlegt man sie in eine Centripetal- und eine Tangentialkomponente, so geht der Fall in die früher behandelten über.

25. Unter der lebendigen Kraft eines irgendwie bewegten Körpers versteht man die Summe der lebendigen Kräfte seiner mat. P. Führt der Körper eine Translation aus, so hat jeder mat. P. dieselbe Geschwindigkeit, und die lebendige Kraft wird durch die Formel des § 23 angegeben, wenn man darin Q gleich dem ganzen Körpergewichte setzt.

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, daß die lebendige Kraft niemals negativ sein kann.

26. Lehrsatz. Ein in beliebiger Bewegung begriffener starrer Körper behält seine lebendige Kraft unverändert bei, wenn keine äußere Kraft an ihm wirkt (oder wenn die äußeren Kräfte im Gleichgewichte stehen).

Anl. z. Bew. Wenn keine äußeren Kräfte wirken ist nach § 24 die Differenz der lebendigen Kräfte irgend eines mat. P. gleich der Arbeit der Resultierenden der inneren Kräfte. Aus dem Prinzipe der Aktion und Reaktion und dem Lehrsatze I, § 114 folgt aber, daß die algebraische Summe der Arbeiten der inneren Kräfte gleich Null ist. Die algebraische Summe aller Differenzen der lebendigen Kräfte verschwindet daher ebenfalls, d. h. die lebendige Kraft des

ganzen Körpers bleibt ungeändert, während sie sich allerdings auf die einzelnen mat. P. im Laufe der Bewegung in verschiedener Weise verteilt.

Für den Fall, daß äußere Kräfte an dem starren Körper angreifen, welche im Gleichgewichte stehen, folgt der Satz aus dem vierten Hauptlehrsatze.

Anm. Wenn der Körper nicht starr, sondern etwa elastisch ist, gilt der Satz nicht mehr. In diesem Falle ist die Differenz der lebendigen Kräfte zu Anfang und Ende der betrachteten Bewegung gleich der Formänderungsarbeit.

27. **Lehrsatz.** Wenn sich ein starrer Körper unter dem Einflusse beliebiger äußerer Kräfte bewegt, so ist die algebraische Summe der von diesen geleisteten Arbeiten gleich der Differenz der lebendigen Kräfte.

Beweis wie oben.

28. Nach diesen Sätzen muß man positive Arbeit an einem Körper leisten um seine lebendige Kraft zu erhöhen. Andererseits vermag der Körper äußere Widerstände zu überwinden (Arbeit nach außen abzugeben) auf Kosten seiner lebendigen Kraft. Poncelet (vgl. Anm. zu § 23) hat zuerst in diesem Verhältnisse nicht nur eine Gleichung zwischen den Zahlenwerten sondern eine Wesensgleichheit zwischen Arbeit und lebendiger Kraft erblickt. Beide sind als verschiedene Erscheinungsformen eines höheren Prinzips aufzufassen, nämlich der Energie. Die eine Form läßt sich in die andere verwandeln.

Besonders deutlich zeigt sich dies am Schwungrade der Dampfmaschine. Während einer Umdrehung ist nicht in jedem Augenblicke die Arbeit der treibenden Kräfte (des Dampfdruckes) gleich der (negativen) Arbeit der widerstehenden Kräfte, wie es zur Erhaltung der gleichförmigen Rotation der Hauptwelle erforderlich wäre. Zur Ausgleichung dieser Unterschiede und zur Vermeidung einer allzu ungleichförmigen Bewegung dient das Schwungrad. So lange die positive Arbeit überwiegt wird die Rotation beschleunigt und der Arbeitsüberschuß wird in lebendige Kraft des Schwungrades verwandelt. In der dann folgenden Periode (in der Umgebung der „Todpunktlage") reicht die Arbeit des Dampfdruckes nicht hin, um der Arbeit der widerstehenden Kräfte die Wage zu halten. Es findet dann eine Rückverwandlung eines Teiles der lebendigen Kraft des Schwungrades in Arbeit statt. Im rotierenden Schwungrade ist Arbeit aufgespeichert; es ist, wie man sich ausdrückt, als ein Arbeitsmagazin aufzufassen.

Aufg. 13. Ein Eisenbahnzug fahre mit einer Geschwindigkeit von 20^{m} pro Sekunde und wiege 150000^{kgr}. Wie schwer muß eine Granate sein, die eine Geschwindigkeit von 700^{m} pro Sekunde besitzt, wenn sie eine ebenso große lebendige Kraft besitzen soll, wie der Eisenbahnzug?

Aufg. 14. Ein Infanteriegewehr vermag in der Minute 10 Schüsse abzugeben. Jedesmal wird ein Geschoß von 25^{gr} Gewicht mit 500^{m} pro Sekunde Anfangsgeschwindigkeit fortgeschleudert. Wieviel Pferdekräfte muß man dem Gewehre zuschreiben, wenn man es als einen Motor ähnlich einer Dampfmaschine ansieht?

Aufg. 15. Ein Wasserlauf führt 10^{cbm} Wasser mit einer Geschwindigkeit von 2^{m} pro Sekunde. Wieviel Pferdekräfte kann man aus ihm gewinnen a) wenn man ein Rad in denselben setzt, das die Geschwindigkeit um $1/_3$ vermindert; b) wenn man ihm $1/_3$ seiner lebendigen Kraft entzieht?

Aufg. 16. Ein Dampfhammer, der in der Minute 40 Schläge ausführt, braucht, von der Reibung abgesehen, zum Betriebe 80 Pferdekräfte. Wie groß ist die lebendige Kraft, mit welcher der Hammer auftrifft und wie groß muß sein Gewicht sein, wenn die Endgeschwindigkeit 10^{m} pro Sekunde beträgt?

29. Die Rolle, welche ein Schwungrad bei einem Motor spielt, ist bereits oben geschildert. Die größte Geschwindigkeit der Schwungradwelle während einer Umdrehung möge der Tourenzahl n_{max} und die kleinste der Tourenzahl n_{min} entsprechen, während n die Zahl der wirklich ausgeführten Touren angiebt. Man nennt dann das Verhältnis

$$\frac{n_{max} - n_{min}}{n}$$

den Gleichförmigkeitsgrad der Maschine. Der Gleichförmigkeitsgrad, den man von einer Dampf- oder Gaskraftmaschine verlangt, richtet sich nach dem besonderen Zwecke, dem sie dienen soll und schwankt etwa zwischen $1/_{10}$ und $1/_{20}$, ausnahmsweise bis $1/_{100}$.

Anm. Richtiger würde es sein, dafür „Ungleichförmigkeitsgrad" zu sagen, weil der Wert des Bruches um so größer ist, je ungleichförmiger die Maschine läuft. Es soll aber hier die gewöhnlich gebrauchte einfachere Bezeichnung beibehalten werden, da ein Mißverständnis nicht wohl möglich ist.

30. Die Berechnung des zur Erzielung eines gegebenen Gleichförmigkeitsgrades erforderlichen Schwungrades kann leicht erfolgen, wenn man weiß, wie groß die Arbeit ist, welche in Form von lebendiger Kraft jedesmal im Schwungrade aufgespeichert und wieder

abgegeben werden soll. Man drückt dieselbe am zweckmäßigsten in Bruchteilen der während einer ganzen Umdrehung von der Maschine geleisteten Arbeit aus. Die Größe dieses Bruchteiles hängt ab von der Art der Maschine. Er ist viel größer für Maschinen mit einem Cylinder als für zwei- oder dreicylindrige und wechselt mit dem Expansionsgrade. Man kann ihn in jedem besonderen Falle unter Zugrundelegung des Indikatordiagramms ohne Schwierigkeit bestimmen.

Aufg. 17. Die Größe des eben besprochenen Bruchteils sei mit α, der Gleichförmigkeitsgrad mit γ, die Zahl der Pferdekräfte mit N, die Tourenzahl mit n, der Schwungraddurchmesser mit D und das Gewicht des Schwungringes mit Q bezeichnet. Welche Gleichung besteht zwischen diesen Größen?

Anl. z. L. Die Arbeitsleistung der Maschine für eine Umdrehung ergiebt sich leicht aus N und n. Man multipliziere mit α und setze dies gleich der Differenz der lebendigen Kräfte, welche den Geschwindigkeiten n_{max} und n_{min} entsprechen. Für $n^2_{max} - n^2_{min}$ kann man $2n^2 . \gamma$ setzen, da genau genug $n_{max} + n_{min} = 2n$ ist.

Aufg. 18. Für eine eincylindrige Dampfmaschine kann ungefähr $\alpha = 1/_5$ gesetzt werden. Wie groß muß der Schwungraddurchmesser sein, wenn $N = 20$, $\gamma = 1/_{25}$, $n = 50$ und der Querschnitt des Schwungringes vorläufig als ein Rechteck von 20×10 cm Seitenlänge angenommen wird?

Aufg. 19. Wie ändert sich D, wenn unter sonst gleichen Umständen der Querschnitt des Schwungringes verdoppelt wird?

Dimensionen der in der Mechanik gebrauchten Größen.

31. Man unterscheidet **Grundmaße** und **abgeleitete Maße**. Ein Grundmaß ist z. B. die Längeneinheit, ein abgeleitetes Maß die Flächeneinheit. Der Flächeninhalt einer Figur (z. B. eines Rechtecks) wird stets durch Multiplikation der Werte zweier Längen gefunden. Man drückt diese Abhängigkeit des Flächenmaßes vom Längenmaße dadurch aus, daß man setzt

$$1^{\text{qcm}} = 1^{\text{cm}^2},$$

oder indem man sagt, die **Dimension** einer Fläche ist gleich der zweiten Potenz einer Länge. Ebenso ist die Dimension eines Volumens gleich der dritten, diejenige des Trägheitsmomentes

einer ebenen Figur (vgl. I, § 236) gleich der vierten Potenz der Längeneinheit u. s. w.

32. Eine Gleichung zwischen Größen verschiedener Art kann nur dann allgemeine Giltigkeit beanspruchen, wenn alle in ihr vorkommenden Glieder dieselbe Dimension besitzen. Denn nur in diesem Falle bleibt sie richtig, wenn man an Stelle der vorher gebrauchten Grundmaße andere wählt. So kann man im allgemeinen eine Länge nicht zu einer Fläche addieren u. s. w.

33. Ein zweites Grundmaß bildet die Zeiteinheit (die Sekunde mittlerer Zeit). Das Maß der Geschwindigkeit ist eine abgeleitete Einheit, es hat die Dimension $L:T$ (L Länge, T Zeit) oder wenn man in cm und Sek. rechnet cm : Sek. Denn die Geschwindigkeit wird berechnet durch Division einer Strecke durch die Zeit, während deren diese durchlaufen wurde (I, § 11). Aus gleichen Gründen folgt, daß die Dimension der Beschleunigung $L:T^2$ ist, oder wenn man negative Exponenten verwendet $L.T^{-2}$ (I, § 19).

34. Außer den beiden genannten bedarf man in der Mechanik noch ein drittes Grundmaß. Es steht uns die Wahl frei, ob wir dazu die Krafteinheit oder die Masseneinheit wählen wollen. Alle übrigen in der Mechanik vorkommenden Größen lassen sich dann auf die drei gewählten Grundmaße zurückführen.

In der technischen Mechanik wählt man gewöhnlich als drittes Grundmaß die Krafteinheit = 1^{kgr}. In der reinen Physik und in der Elektromechanik ist dies weniger gebräuchlich; man wählt dort die Masseneinheit = 1^{gr} als drittes Grundmaß. Dabei hat 1^{gr} Masse eine andere Bedeutung als ein 1^{gr} Gewicht, das letztere ist die Kraft, welche von der Schwere an 1^{gr} Masse ausgeübt wird.

Wir schließen uns dem herrschenden Gebrauche an, indem wir uns hier für die erste Annahme entscheiden, d. h. für das sogenannte konventionelle Maßsystem.

35. Die Dimension des statischen Momentes oder der Arbeit einer Kraft ist $K.L$ (K Kraft), die Dimension einer sekundlichen Arbeitsleistung $K.L.T^{-1}$, diejenige einer Masse $K.L^{-1}.T^2$ (I, § 55).

Da lebendige Kraft und Arbeit Größen gleicher Art sind,

muß die Dimension der lebendigen Kraft ebenfalls gleich $K.L$ sein. In der That ergiebt sich dies sofort, wenn man in den algebraischen Ausdruck des § 23 die Dimensionen von Q, v und g einführt.

Aufg. 20. Welches ist im konventiellen Maßsysteme die Dimension der spezifischen Spannung oder des Elastizitätsmoduls?

Aufg. 21. Im absoluten Maßsysteme bildet die Masseneinheit das dritte Grundmaß. Wenn man dieselbe mit M bezeichnet, welches sind die Dimensionen der Kraft, des statischen Momentes, der lebendigen Kraft, des Elastizitätsmoduls?

36. Lebendige Kraft eines rotierenden Körpers. Wenn alle Punkte eines sich bewegenden Körpers die gleiche Geschwindigkeit besitzen, läßt sich die lebendige Kraft in einfachster Weise nach § 25 ermitteln. Bei der Berechnung des Schwungrades wurde davon bereits Gebrauch gemacht. Es wurde dabei stillschweigend vorausgesetzt, daß alle Punkte des Schwungringes nahezu gleichweit von der Drehachse entfernt seien. Wenn dies nicht zutrifft, muß man die Geschwindigkeit jedes mat. P. mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit ausdrücken, um die lebendige Kraft zu berechnen.

Die Winkelgeschwindigkeit u sei in Bogenmaß angegeben, d. h. die Zahl u sage aus, wievielmal der von jedem Punkte in der Sekunde beschriebene Kreisbogen in dem zugehörigen Radius enthalten ist. (Die Dimension von u ist demnach T^{-1}.) Dann ist unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung

$$v = r . u,$$

und für die lebendige Kraft L des rotierenden Körpers erhalten wir den Ausdruck

$$L = \sum \varDelta Q \cdot \frac{r^2 u^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} \cdot J,$$

wenn unter J das polare Trägheitsmoment im Sinne des § 21 verstanden wird.

An Stelle von J schreibt man häufig $Q . \varrho^2$, wo Q das ganze Körpergewicht und ϱ ein gewisser Mittelwert aller r, der sogenannte Trägheitsradius ist. Direkt läßt sich indessen ϱ nicht berechnen, es wird vielmehr gefunden, indem man zunächst J berechnet. Die Berechnung von J kann entweder mit Hilfe der höheren Rechnung

oder durch Zerlegen des Körpers in Lamellen und Summieren erfolgen.

Aufg. 22. Der Trägheitsradius eines homogenen, um seine Achse rotierenden Cylinders ist $\varrho = \frac{1}{2} R \sqrt{2}$, wenn R den Radius der Querschnittsfläche bedeutet. Wie groß ist die lebendige Kraft einer kreisförmigen Scheibe von 20^{cm} Dicke, 180^{cm} Durchmesser und dem spezifischen Gewichte 3,4, wenn sie in der Minute 200 Umdrehungen macht?

Aufg. 23. Der Trägheitsradius einer homogenen Kugel ist $\varrho = \frac{1}{5} R \sqrt{10}$. Wenn die lebendige Kraft, welche die Erde vermöge ihrer Rotation besitzt, zur Arbeitsleistung verbraucht werden könnte, wieviel Pferdekräfte könnten aus derselben 1000 Jahre hindurch gewonnen werden, wenn das mittlere spezifische Gewicht = 5,5 gesetzt wird?

Aufg. 24. Wie läßt sich die Formel für die reduzierte Länge eines physischen Pendels in § 22 mit Hilfe der Sätze über die lebendige Kraft ableiten?

Anl. z. L. Der Winkelweg in Bogenmaß sei w, dann ist die von der Schwerkraft geleistete Arbeit (vgl. § 22) gleich Qws' und (§ 27)

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2g} \cdot J = Qws'.$$

Für das mathematische Pendel von der Länge l ist ebenso, wenn Q' das Gewicht desselben ist,

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2g} Q' l^2 = Q'wl'.$$

Durch Division beider Gleichungen und mit Berücksichtigung der Proportion $s : s' = l : l'$ folgt die gesuchte Formel.

Drittes Kapitel.

Der Stoß.

37. Zwei Kugeln von den Gewichten Q_1 und Q_2 mögen fortschreitende Bewegungen längs derselben Geraden mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 ausführen; v_2 sei größer als v_1 und beide seien gleichgerichtet. Der Stoß beginnt, sobald die Entfernung der Kugelmittelpunkte gleich der Summe der Kugelradien

ist; er wird im vorliegenden Falle ein gerader centraler Stoß genannt.

Wenn die Kugeln nicht absolut starre Körper sind, d. h. bei allen wirklich in der Natur vorkommenden Körpern, nähern sich die Kugelmittelpunkte unmittelbar nach dem Stoße noch ein wenig, indem sich die Kugeln an der Berührungsstelle etwas abplatten. Dies dauert so lange, bis die Geschwindigkeit beider Kugelmittelpunkte durch Verminderung von v_2 und Vergrößerung von v_1 gleich groß geworden ist. Die Zeit, welche bis zu diesem Augenblicke vom Beginne des Stoßes an verfließt, wird die erste Stoßperiode genannt.

38. In der ersten Stoßperiode ist die Bewegung von Q_2 verzögert, diejenige von Q_1 beschleunigt. Die Ursache davon liegt in der Oberflächenkraft, welche zwischen beiden Körpern auftritt, und zwar ist nach dem Prinzipe der Aktion und Reaktion die verzögernde Kraft an Q_2 von derselben Größe, wie die beschleunigende an Q_1. Bezeichnet man die Oberflächenkraft mit P, die Beschleunigung von Q_1 mit G_1, und die Verzögerung von Q_2 mit G_2, so ist:

$$G_1 = \frac{P}{Q_1} \cdot g; \quad G_2 = \frac{P}{Q_2} \cdot g \quad \text{und daher} \quad \frac{G_1}{G_2} = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Da dies in jedem Augenblicke gilt, muß auch die ganze Geschwindigkeitsänderung während der ersten Stoßperiode dem betreffenden Kugelgewichte umgekehrt proportional sein. Bezeichnet man die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper am Ende der ersten Stoßperiode mit w, so ist demnach:

$$\frac{w - v_1}{v_2 - w} = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Durch Auflösen nach w erhält man daraus:

$$w = \frac{v_1 Q_1 + v_2 Q_2}{Q_1 + Q_2}.$$

39. Wenn die Kugeln aus einem weichen (plastischen) Stoffe hergestellt sind, führen sie nach Beendigung der ersten Stoßperiode die Bewegung mit der Geschwindigkeit w gemeinsam aus, so lange als nicht irgend eine neue Störung hinzukommt. Der ganze Vorgang des Stoßes spielt sich dann innerhalb der ersten Stoß-

periode ab. Zuweilen spricht man in diesem Falle von einem Stoße starrer Körper, indessen mit Unrecht; es ist richtiger, den Fall als einen Stoß weicher oder unelastischer Körper zu bezeichnen.

Je nachgiebiger die stoßenden Körper gegen die Kraft P sind, desto länger dauert die erste Stoßperiode; dagegen ist die gemeinsame Geschwindigkeit w, welche beide Körper am Ende derselben annehmen (wie sich aus der Formel des § 38 ergiebt), unabhängig von der Härte der Körper und der Stoßzeit. Man ist daher wohl berechtigt zu sagen, daß die Betrachtung des § 38 für beliebig harte und schließlich auch für starre Körper Giltigkeit habe, aber man ist nicht berechtigt zu sagen, daß bei absolut starren Körpern der Vorgang mit der ersten Stoßperiode thatsächlich zu Ende sei. Es liegt darin vielmehr eine willkürliche und durch nichts begründete Annahme über das Verhalten starrer Körper.

Es wird nützlich sein, dies noch an einem Beispiele klar zu machen. Ein Balken sei an seinen beiden Enden und außerdem noch an einer Stelle in der Mitte unterstützt und irgendwie belastet. Wenn der Balken absolut starr ist, vermag man durch kein Mittel zu berechnen, wie sich die Auflagerkräfte auf die drei Stützpunkte verteilen. Es wäre ganz willkürlich und im allgemeinen sicher unrichtig, wenn man z. B. annehmen wollte, daß sich die Lasten zu gleichen Teilen auf die drei Stützpunkte verteilen würden. Ebenso verhält es sich mit der Annahme, daß der Stoß starrer Körper sich auf die erste Stoßperiode beschränkte. Dagegen kann man in beiden Fällen über das wirkliche Verhalten der Körper Auskunft geben, wenn man annimmt, daß die Körper nicht starr, sondern elastisch sind.

40. Je kürzer die erste Stoßperiode ist, desto größer müssen G_1 und G_2 sein, um die Geschwindigkeitsänderung herbeizuführen; um so größer muß daher auch die Kraft P sein. Wenn die Körper nur äußerst wenig zusammendrückbar sind, erlangt daher P einen äußerst großen Wert. Bei absolut starren Körpern müßte P unendlich groß werden.

Sobald P einen von der Festigkeit der Körper abhängigen Wert übersteigt, tritt Bruch ein.

Aufg. 25. Wenn $Q_1 = 100$, $Q_2 = 200^{\text{kgr}}$, $v_1 = 3$, $v_2 = 5^{\text{m}}$ pro Sek. ist, a) wie groß ist w? b) Wie groß ist der durchschnittliche Wert des Stoßdrucks P, wenn sich die Kugelmittelpunkte während der ersten Stoßperiode um $1{,}5^{\text{mm}}$ nähern?

Anl. z. L. ad b) Wenn wir einen durchschnittlichen Wert von P und damit von G_1 und G_2 einführen, ist die Bewegung von Q_1 als eine gleichförmig beschleunigte, die von Q_2 als eine gleichförmig verzögerte anzusehen. Wendet man die vierte Formel der gleichförmig veränderten Bewegung (I, § 24) auf beide Fälle an und beachtet, daß $s_2 = s_1 + 1{,}5^{mm}$ ist, so erhält man nach Einsetzen der Werte von G_1 und G_2 (§ 38) durch Auflösen leicht P.

Aufg. 26. Ein ballistisches Pendel bestehe aus einem mit Sand gefüllten und vermittelst einer Stange drehbar aufgehängten Kasten von 1200^{kgr} Gewicht. Eine Geschützkugel von 8^{kgr} Gewicht dringt in denselben ein und bleibt darin stecken; das Pendel macht einen Ausschlag, bei dem sich der Schwerpunkt um $1{,}5^{m}$ hebt. Wie groß war die Geschwindigkeit der Geschützkugel?

Anl. z. L. Man drücke w nach § 38 in v_2 aus und beachte, daß bei der weiteren Bewegung die lebendige Kraft des Pendels sich in die Arbeitsleistung $1208 \times 1{,}5^{mkgr}$ umwandelt. Vorausgesetzt wird hierbei, daß sich das Stangengewicht vernachlässigen läßt.

41. Während der ersten Stoßperiode findet ein Verlust an lebendiger Kraft statt. Derselbe beträgt

$$\frac{Q_1}{2g} v_1{}^2 + \frac{Q_2}{2g} \cdot v_2{}^2 - \frac{Q_1 + Q_2}{2g} \cdot w^2 .$$

Durch Einsetzen von w aus § 38 geht dies nach einfacher Umformung über in

$$\frac{1}{2g} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 + Q_2} (v_2 - v_1)^2 .$$

Diesem Verluste an lebendiger Kraft entspricht die zur Formänderung verbrauchte Arbeit. Die inneren Kräfte, welche hierbei überwunden werden müssen, können entweder rein elastischer Art sein, oder sie können innere Reibungen zwischen den sich gegenseitig verschiebenden materiellen Punkten des Körpers sein. Im ersten Falle findet eine Aufspeicherung der Arbeitsleistung in Form sog. potentieller Energie statt, die sich während der zweiten Stoßperiode wieder in Arbeit zurückverwandelt. Im zweiten Falle ist der Arbeitsverlust ein dauernder, gerade so wie bei dem Arbeitsverluste durch Reibung bei den Maschinen. Spurlos verschwindet die Arbeit aber auch hier nicht, es tritt eine ihr äquivalente Entwickelung von Wärme ein. Eine Rückverwandelung der letzteren in Arbeit findet im weiteren Verlaufe des Stoßes dagegen nicht statt.

42. Die Größe des Stoßdruckes rein elastischer Körper läßt sich aus dem Verluste an lebendiger Kraft leicht berechnen, wenn das Maß der Abplattung der gestoßenen Körper bekannt ist. Der Stoßdruck P ist in jedem Augenblicke proportional der Annäherung s der beiden Kugelmittelpunkte, also, wenn man die betreffenden Werte zu Ende der ersten Stoßperiode mit P_1 und s_1 bezeichnet,

$$P = P_1 \frac{s}{s_1}.$$

Die Arbeit, welche zu einer weiteren Annäherung Δs der Kugelmittelpunkte aufgewendet werden muß, ist gleich $P\Delta s$. Da P proportional mit s wächst, kann man bei der Berechnung der ganzen Formänderungsarbeit $\frac{1}{2}P_1$ als Mittelwert von P annehmen und erhält

$$\frac{1}{2} P_1 \cdot s_1 = \frac{1}{2g} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 + Q_2} (v_2 - v_1)^2,$$

woraus sich P_1 und schließlich auch P für jeden Augenblick ergiebt.

Aufg. 27. Wie groß wird unter Voraussetzung eines rein elastischen Stoßes P_1 im Falle der Aufg. 25?

Aufg. 28. Zwei Eisenbahnwagen von je 12000^{kgr} Gewicht stoßen mit einer relativen Geschwindigkeit von 2^{m} pro Sekunde aufeinander. Wie groß ist P_1, wenn die Annäherung s_1 infolge des Eindrückens der Puffer 6^{cm} beträgt?

43. In der Natur giebt es keine rein elastischen Körper. Die wichtigsten Konstruktionsmaterialien nähern sich aber dem elastischen Verhalten in sehr hohem Grade (I., IV. Abschnitt), so lange die auftretenden inneren Kräfte nicht über die Elastizitätsgrenze hinausgehen. Es hängt daher nicht nur von dem Stoffe, sondern namentlich auch von der Größe des Stoßdrucks ab, ob die Körper sich während des Stoßes mehr oder weniger wie elastische verhalten.

Durch eine geeignete Formgebung kann man sehr dazu beitragen, den Stoß zu einem nahezu elastischen zu machen. So wird in der Aufg. 28 mit viel größerem Rechte als in Aufg. 27 vorausgesetzt, daß der Stoß sich als ein elastischer ansehen lasse. Eine Feder, wie sie bei den Puffern der Eisenbahnwagen ver-

wendet wird, vermag nämlich eine erhebliche Formänderungsarbeit ohne Überschreitung der Elastizitätsgrenze aufzunehmen, während diese bei zwei kugelförmigen Körpern weit eher eintritt.

44. Zweite Stoßperiode beim rein elastischen Stoße. Die zweite Stoßperiode beginnt mit dem Augenblicke, in dem die beiden Kugeln die gleiche Geschwindigkeit w erlangen und dauert so lange an, als noch eine Oberflächenkraft P übertragen wird. Die vollkommene Elastizität, welche wir jetzt voraussetzen, besteht darin, daß die Kugeln während der zweiten Stoßperiode ihre ursprüngliche Gestalt vollkommen wieder annehmen, und daß bei jedem Maße der Zusammendrückung die Oberflächenkraft P in der zweiten Stoßperiode ebenso groß ist, als sie bei gleicher Abplattung in der ersten Stoßperiode war.

Die sich stoßenden Körper durchlaufen in diesem Falle rückwärts wieder die Reihenfolge der Zustände, welche sie in der ersten Stoßperiode angenommen hatten. In entsprechenden Stellungen beider Stoßperioden ist nicht nur der Stoßdruck P von gleicher Größe, sondern auch die relative Geschwindigkeit beider Körper ist gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. Daraus folgt weiter, daß auch die ganze Geschwindigkeitsänderung während der zweiten Stoßperiode ebenso groß ist, als in der ersten. Man erhält demnach

$$u_1 = 2w - v_1 \quad \text{und} \quad u_2 = 2w - v_2,$$

wenn unter u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten nach Beendigung des Stoßes verstanden werden. Für w ist der in § 38 ermittelte Wert einzusetzen.

45. Beim rein elastischen Stoße findet kein Verlust an lebendiger Kraft statt. Die Summe der lebendigen Kräfte beider Körper nach dem Stoße ist nämlich

$$\frac{Q_1}{2g}(2w - v_1)^2 + \frac{Q_2}{2g}(2w - v_2)^2.$$

Beim Ausquadrieren geben die Glieder mit v_1^2 und v_2^2 die lebendige Kraft vor dem Stoße an und alle mit w behafteten Glieder heben sich nach Einsetzen des Wertes von w aus § 38 gegeneinander fort.

Übrigens ließ sich dies von vornherein voraussehen, denn die inneren Kräfte leisten bei dem vorausgesetzten vollkommen elastischen Verhalten während der zweiten Stoßperiode wieder eine Arbeit, ebenso groß als die, welche zu ihrer Überwindung in der ersten Stoßperiode erforderlich war. Der Zuwachs an lebendiger Kraft in der zweiten Stoßperiode muß daher so groß sein, als die Abnahme in der ersten Stoßperiode. Man kann daher umgekehrt diesen von vornherein feststehenden Satz zur Ermittelung von u_1 und u_2 benutzen.

46. Wenn die Elastizitätsgrenze von den beim Stoße auftretenden inneren Kräften an einzelnen Stellen überschritten wurde, verläuft die zweite Stoßperiode nicht so, wie jetzt angenommen war, daß sie sich zur ersten wie ein Spiegelbild verhält. Die Formänderung ist teilweise bleibend und bei gleichen relativen Stellungen ist der Stoßdruck P in der zweiten Stoßperiode kleiner als in der ersten. Daraus folgt, daß auch die Geschwindigkeitsänderungen in der zweiten Stoßperiode kleiner als in der ersten sind, und man erhält

$$u_1 < 2w - v_1 \quad \text{und} \quad u_2 > 2w - v_2,$$

während zwischen u_1 und u_2 noch die aus den Betrachtungen des § 38 hervorgehende Gleichung besteht

$$\frac{u_1 - v_1}{v_2 - u_2} = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Aufg. 29. Wie heißen die Formeln für u_1 und u_2 a) wenn angenommen wird, daß in einem bestimmten Falle die Geschwindigkeitsänderung in der zweiten Stoßperiode das 0,7-fache, oder allgemeiner das α-fache derjenigen in der ersten ausmacht? b) wenn von der lebendigen Kraft, welche in der ersten Stoßperiode verloren geht, das 0,7- oder α-fache in der zweiten Periode durch Rückverwandelung aus potentieller Energie wieder erscheint?

Anl. z. L. In beiden Fällen hat man zwei Unbekannte (u_1 und u_2), zwischen denen zunächst die Gleichung am Schlusse des vorstehenden Paragraphen besteht. Eine zweite Gleichung ergiebt sich aus der angegebenen Bedingung.

Aufg. 30. Wie heißen die Formeln für den geraden Stoß, wenn $Q_1 = Q_2$ ist? (Vertauschung der Geschwindigkeiten.)

Aufg. 31. Was wird aus den Formeln, wenn der eine Körper sehr groß im Vergleiche zum andern, oder wenn er eine feste Wand ist?

Anl. z. L. In der Formel für w kann man Q_2 gegen Q_1 im Nenner vernachlässigen, wenn das letztere sehr viel größer als jenes ist (wie bei einer festen Wand, für welche Q_1 gleich dem Gewichte des ganzen Erdballs ist).

47. Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 seien entgegengesetzt gerichtet. In diesem Falle gelten alle bisherigen Betrachtungen, wenn man der einen Geschwindigkeitsrichtung das positive, der anderen das negative Vorzeichen beilegt, und die Vorzeichen aller in den Formeln vorkommenden Geschwindigkeiten danach festsetzt.

Von vornherein ist klar, daß der Verlauf des Stoßes nur von den relativen, nicht von den absoluten Geschwindigkeiten beider Körper abhängen kann. So kommt auch in dem Ausdrucke für den Verlust an lebendiger Kraft in § 41 nur die relative Geschwindigkeit $v_2 - v_1$ vor.

Legen wir der Geschwindigkeit v_2 das positive Vorzeichen bei, während v_1 entgegengesetzt gerichtet ist, so können wir den Fall auf den früheren dadurch zurückführen, daß wir beiden Körpern noch die gleiche positive Geschwindigkeit $a > v_1$ beilegen, wodurch ihre Relativbewegung und der Verlauf des Stoßes nicht geändert werden. In die Formel für w ist dann für v_2 der Wert $a + v_2$ und für v_1 der Wert $a - v_1$ einzuführen. Von dem so erhaltenen Werte von w ist aber noch die hinzugedachte Geschwindigkeit a zu subtrahieren. Man erhält auf diesem Wege einen Ausdruck für w, welcher sich von dem früheren nur durch das Vorzeichen des mit v_1 behafteten Gliedes unterscheidet. Die oben ausgesprochene Behauptung ist damit bewiesen. Ein negativer Wert von w zeigt an, daß sich die Körper am Ende der ersten Stoßperiode in der Richtung von v_1 bewegen.

Die in § 38 durchgeführte Betrachtung läßt sich übrigens auch auf den hier vorliegenden Fall ohne weiteres zur Anwendung bringen.

48. Lehrsatz. Wenn keine äußeren Kräfte einwirken, bewegt sich der Schwerpunkt beider Körper vor, während und nach dem Stoße mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiter.

Anl. z. Bew. Die Entfernungen des Schwerpunktes der in irgend einer Lage (zunächst vor dem Stoße) befindlichen Körper (wenn diese fest mit einander verbunden gedacht werden) von den Schwerpunkten der einzelnen Körper (den Kugelmittelpunkten) seien mit x_1 und x_2 bezeichnet. Dann ist $Q_1 x_1 = Q_2 x_2$. Nach einem Zeitteilchen Δt bewegen sich die Kugeln um $v_1 \cdot \Delta t$, bezw. $v_2 \cdot \Delta t$ und der Schwerpunkt um $w' \cdot \Delta t$ weiter, wenn w' die Geschwindigkeit der Bewegung des Schwerpunktes bedeutet. Aus x_1 wird $x_1 + (v_1 - w')\Delta t$, aus x_2 wird $x_2 + (w' - v_2)\Delta t$, und es muß auch dann wieder

$$Q_1 x_1 + Q_1 (v_1 - w')\Delta t = Q_2 x_2 + Q_2 (w' - v_2)\Delta t$$

sein. Subtrahiert man davon die frühere Gleichung und löst nach w' auf, so findet man

$$w' = w,$$

d. h. die Geschwindigkeit des Schwerpunktes vor dem Stoße ist ebenso groß wie die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider Körper am Ende der ersten Stoßperiode.

Während irgend eines kleinen Zeitteilchens der ersten oder zweiten Stoßperiode sei die mittlere Geschwindigkeit von Q_2 gleich $v_2 - y$; dann ist diejenige von Q_1 gleich $v_1 + \frac{Q_2}{Q_1} y$ (§ 38) und x_1 geht in $\varDelta t$ über in $x_1 + \left(v_1 + \frac{Q_2}{Q_1} y - w'\right) \varDelta t$. Wir erhalten

$$Q_2 \left[x_2 + \left(w' - (v_2 - y)\right) \varDelta t\right] = Q_1 \left[x_1 + \left(v_1 + \frac{Q_2}{Q_1} y - w'\right) \varDelta t\right]$$

und daraus wie früher

$$w' = w.$$

In gleicher Weise läßt sich dies auch für die Bewegung nach dem Stoße zeigen.

Anm. Der hier bewiesene Lehrsatz bildet nur einen speziellen Fall des allgemeinen Satzes: „Der Schwerpunkt eines Systems von Körpern bewegt sich stets so, als wenn die ganze Masse aller Körper in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte auf ihn in gleicher Größe und Richtung übertragen würden." Der Beweis läßt sich in derselben Weise führen wie es oben geschah. Der Satz wird der „Satz von der Bewegung des Schwerpunktes" genannt.

Aufg. 32. Wenn zwei Eisenbahnzüge von gleichen Gewichten mit gleich großen Geschwindigkeiten gegen einander fahren, erfolgt der Symmetrie wegen der Stoß für jeden ebenso, als wenn er gegen eine ruhende feste Wand gefahren wäre. Andererseits ist aber der Vorgang beim Stoße auch derselbe, als wenn der eine Zug die doppelte Geschwindigkeit gehabt hätte und der andere in Ruhe gewesen wäre. Im letzten Falle ist aber die lebendige Kraft vor dem Stoße doppelt so groß, als diejenige beider Körper im anderen Falle. Wie erklärt es sich nun, daß die Formänderungsarbeit in beiden Fällen gleich groß wird?

49. Einrammen von Pfählen. Die Mechanik hat hier folgende Fundamentalaufgabe zu lösen. Auf einen einzurammenden Pfahl fällt ein Gewicht Q (der „Rammbär") von der Höhe h

herab. Nachdem eine Anzahl von Schlägen ausgeführt ist, ergiebt sich, daß der Pfahl für jeden Schlag durchschnittlich um die Strecke s eingetrieben wurde. Wie groß ist die ruhende Last P, welche man dem Pfahle alsdann aufbürden darf, ohne daß derselbe weiter einsinkt?

Der Vorgang entspricht genau demjenigen beim Einschlagen eines Nagels in einen Holzkörper. Der eindringende Pfahl verdrängt und komprimiert das Bodenmaterial seitlich. Es entsteht dadurch ein bedeutender Druck zwischen der Pfahloberfläche und dem anliegenden Erdkörper und eine sich dem weiteren Eindringen ebensowohl als dem Herausziehen des Pfahles widersetzende Reibung. Der Widerstand, welcher sich dem tieferen Eindringen der eisenbeschlagenen Pfahlspitze in die folgenden Schichten entgegenstellt, kann in gewöhnlichen Fällen gegen jene Reibung vernachlässigt werden.

50. Die einfachste, aber nicht sehr befriedigende Lösung der Aufgabe ergiebt sich auf folgende Art. Der Rammbär nimmt beim Herabfallen eine lebendige Kraft an, die gleich der von der Schwere geleisteten Arbeit, also gleich Qh ist. Beim Stoße wird diese wieder in Arbeit verwandelt, und zwar teils in Deformationsarbeit, teils in Arbeit zur Überwindung der Kraft P. Die letztere ist gleich Ps. Setzt man diese gleich der ganzen lebendigen Kraft, so erhält man für Ps und daher für P einen zu großen Wert. Man kann demnach allgemein schreiben

$$P = \alpha \cdot Q \frac{h}{s},$$

wo α sicher ein ächter Bruch ist. Aus Erfahrungsresultaten kann man erkennen, wie groß unter gewissen Verhältnissen α gewählt werden darf, damit der Pfahl den so berechneten Druck P mit Sicherheit übertragen kann.

51. Eine eingehendere Betrachtung des Vorganges läßt sich auf Grund der früheren Besprechung der beiden Stoßperioden durchführen. Unmittelbar nach Beginn der ersten Stoßperiode sind die sich stoßenden Körper noch wenig abgeplattet, und der geringen Formänderung entsprechend ist auch der Stoßdruck noch unbedeutend. Die ganze Masse des Pfahles bleibt zunächst noch

in Ruhe, die Geschwindigkeit des Rammbäres vermindert sich währenddessen und die damit verlorene lebendige Kraft setzt sich in Formänderungsarbeit (bezw. in Wärme) um. Das Einsinken des Pfahles kann erst beginnen, wenn der Stoßdruck gleich der Pfahlreibung P geworden ist. Wenn der Rammbär nur aus geringer Höhe niederfällt, kann es sein, daß der Stoßdruck den Wert von P überhaupt nicht erreicht. Der Pfahl wird dann gar nicht eingetrieben. Es ergiebt sich daraus die Unzulänglichkeit der Betrachtung des vorigen Paragraphen.

Sobald der Stoßdruck die Pfahlreibung übersteigt, beginnt eine beschleunigte Abwärtsbewegung des Pfahles, die so lange anhält, bis in der zweiten Stoßperiode der Stoßdruck wieder unter jenen Wert herabsinkt. Die Bewegung des Pfahles setzt sich aber dann noch verzögert für kurze Zeit fort, bis die in ihm angesammelte lebendige Kraft vollständig wieder durch die Reibungsarbeit aufgezehrt ist.

52. Wir gelangen so dazu, hier drei Stoßperioden zu unterscheiden. Die erste und letzte entsprechen den beiden Stoßperioden beim gewöhnlichen Stoße. Die mittlere Periode entspricht beim gewöhnlichen Stoße annähernd dem Augenblicke, in welchem beide Körper sich mit gleicher Geschwindigkeit voranbewegen. Jener Zeitpunkt hat sich hier in eine Zeitstrecke verwandelt. Während der ersten und letzten Periode ruht der Pfahl, in jener bewegt sich der Rammbär verzögert abwärts, in dieser beschleunigt aufwärts.

Nennt man diejenige Hubhöhe des Rammbärs, bei welcher der Stoßdruck die Größe der Pfahlreibung gerade erreicht, ohne sie zu überschreiten, den unwirksamen Hub, und bezeichnet sie mit h_0, so ist die lebendige Kraft, welche während der ersten der drei genannten Perioden in Formänderungsarbeit verwandelt wird, gleich Qh_0. Wenn der Stoß vollkommen elastisch ist, wird dieselbe in der letzten Periode wieder in lebendige Kraft des aufspringenden Rammbärs verwandelt. Der Aufsprung des Bärs ist dann gleich h_0; in Wirklichkeit bleibt er aber wegen der unvollkommenen Elastizität hinter diesem Werte zurück.

Die Differenz $Qh - Qh_0$ giebt die zur Überwindung der Pfahlreibung verfügbare Arbeitsgröße an. Ganz wird sie dazu

aber auch nicht verwendet, weil auch noch in der mittleren Periode eine Formänderungsarbeit zu leisten ist, die nur teilweise wieder frei wird. Man hat daher zu setzen

$$P = \alpha \cdot Q \cdot \frac{h - h_0}{s},$$

wo α wiederum ein ächter Bruch ist, welcher aus der Erfahrung zu bestimmen ist.

Aufg. 33. Wenn $Q = 300^{kgr}$, $h = 1{,}5^m$ ist und der Pfahl nach 20 Schlägen sich um 25^{mm} senkte, wie groß ist die Last, welche der Pfahl mit Sicherheit tragen kann nach § 50, wenn man nach Versuchsergebnissen in diesem Falle $\alpha = {}^1/_{15}$ setzen kann?

Aufg. 34. Wie groß wird dagegen die mit Sicherheit getragene Last nach § 52, wenn $h_0 = 0{,}5^m$, dagegen $\alpha = {}^1/_{10}$ gesetzt werden kann?

Aufg. 35. Wie lange muß dagegen das Einrammen noch fortgesetzt werden, wenn der Pfahl $30\,000^{kgr}$ tragen soll und dabei auf die Veränderlichkeit von h_0 mit dem Pfahldrucke Rücksicht zu nehmen ist?

Anl. z. L. Die Formänderungsarbeit Qh_0, welche aufgewendet wird, bis der Pfahl sich zu bewegen beginnt, ist proportional dem Quadrate der Pfahlreibung; denn nicht nur der mittlere Stoßdruck während der ersten Periode, sondern auch die Abplattung, d. h. der Weg, auf dem die Formänderungsarbeit geleistet wird, wächst proportional mit der Pfahlreibung. An Stelle von h_0 hat man daher in der Formel für P nicht $0{,}5^m$, sondern den entsprechend vergrößerten Wert einzusetzen.

53. Auch die vorstehende Betrachtung giebt keinen erschöpfenden Aufschluß über die Vorgänge beim Rammen, weil sie keine Rücksicht auf die Bewegungen nimmt, welche der den Pfahl umgebende Boden ausführt. Ein beträchtlicher Teil der Arbeitsleistung verliert sich in diesen Bodenerschütterungen. Der Einfluß derselben äußert sich in der Größe des Coeffizienten α.

Ebenso läßt sich h_0 nicht von vornherein angeben. Man kann nur sagen, daß es näherungsweise proportional mit dem Quadrate der Pfahlreibung zunimmt, wie bereits in Aufg. 35 angenommen war. Im Übrigen hängt h_0 sowohl von der Beschaffenheit des Materials, als auch von der Bodenbeschaffenheit ab.

Schließlich kann man dieser Betrachtung noch einen Vorwurf machen, der auch die frühere Erörterung des gewöhnlichen Stoßes

trifft. Es ist nämlich keine Rücksicht genommen auf die Stoßwellen, d. h. auf diejenigen Formänderungen, welche sich im Verlaufe des Stoßes gleich den Schallwellen durch die ganze Masse des gestoßenen Körpers wellenförmig ausbreiten. Die Hörbarkeit des Stoßes verdankt ihnen ihren Ursprung.

Für die technischen Anwendungen genügt indessen derjenige Grad der Annäherung an den wahren Vorgang in der Natur, welchen wir durch die vorausgegangenen Betrachtungen erreichten.

54. Der schiefe Stoß. In allen Fällen, bei denen sich der Stoß nicht als gerade und central ansehen läßt, stellen sich der genauen Verfolgung der Erscheinung erhebliche Schwierigkeiten in den Weg. Da diese Fälle übrigens keine besondere Wichtigkeit für die Anwendungen besitzen, sollen sie hier nur kurz besprochen werden.

Es sei zunächst der Fall betrachtet, daß zwei Kugeln im übrigen so zusammenstoßen, wie es in § 37 vorausgesetzt war, während indessen eine derselben neben der fortschreitenden Bewegung gleichzeitig eine Rotation um irgend eine Schwerlinie ausführt. Wegen der Reibung an der Berührungsstelle tritt dann neben dem centralen Stoßdrucke noch eine Tangentialkraft auf, welche die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Kugel vermindert und der anderen Kugel eine Rotation im entgegengesetzten Sinne erteilt. Gleichzeitig erfolgt aber durch die Tangentialkraft auch eine Ablenkung beider Kugelmittelpunkte aus der früheren Bewegungsrichtung.

55. Ein anderer Fall, den man vorzugsweise unter der Bezeichnung des schiefen Stoßes versteht, besteht darin, daß zwei Kugeln zwar nur fortschreitende Bewegungen ausführen, deren Richtungen aber einen beliebigen Winkel mit einander bilden. Da es nur auf die relativen Bewegungen ankommt, läßt sich der Fall immer auf den einfacheren zurückführen, daß die eine Kugel ruht, während die andere sich in einer Richtung bewegt, welche mit der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte irgend einen spitzen Winkel einschließt.

Man behandelt den Fall gewöhnlich in der Weise, daß man die Geschwindigkeit der sich bewegenden Kugel in zwei Komponenten

zerlegt, von denen die eine in die Richtung der Centralen fällt, während die andere dazu senkrecht steht. Von der letzteren nimmt man an, daß sie auf den Vorgang beim Stoße ohne Einfluß bleibt, daß sich also der Stoß so abspielt, als wenn nur ein centraler Stoß mit der centralen Geschwindigkeitskomponente stattfände. Die aus den früheren Betrachtungen sich ergebende Endgeschwindigkeit der stoßenden Kugel in der Richtung der Centralen muß dann noch mit der unverändert erhaltenen tangentialen Komponente zu einer resultierenden Geschwindigkeit vereinigt werden.

Indessen ist leicht einzusehen, daß diese Betrachtung nicht ganz genau sein kann wegen der Reibung der Kugeln an der Berührungsstelle. Beide Kugeln werden hierdurch während des Stoßes zugleich in Rotation versetzt.

56. Ebenso ist es bei dem elastischen schiefen Stoße einer Kugel gegen eine feste Wand. Wenn man von der Wirkung der Tangentialkraft absieht, ergiebt sich leicht, daß die Kugel so von der Wand abprallen muß, wie ein Lichtstrahl von einem Spiegel zurückgeworfen wird.

Die Tangentialkraft zwischen Kugel und Wand bewirkt aber, daß die Einfallrichtung einen etwas größeren Winkel mit der Normalen zur Wand bilden muß, als die Richtung, in welcher die Kugel zurückgeworfen wird. Zugleich wird der Kugel eine Rotation erteilt. Die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der abprallenden Kugel ist auch beim vollkommen elastischen Stoße kleiner geworden als sie vor dem Auftreffen war; der Überschuß hat sich in die lebendige Kraft der Rotation verwandelt. Aus dieser Bedingung läßt sich die Größe der Rotationsgeschwindigkeit berechnen, wenn die beiden Winkel bekannt sind.

Anm. Es ist leicht einzusehen, in welchem Sinne sich der Vorgang ändert, wenn die Kugeln in den Fällen der §§ 55 und 56 vor dem Stoße bereits eine Rotation um irgend eine Schwerlinie besitzen.

57. Excentrischer Stoß. Es sei jetzt angenommen, daß der eine Körper vor dem Stoße in Ruhe war und der andere eine fortschreitende Bewegung ausführte. Die Bewegungsrichtung des letzteren soll ferner mit der Richtung der Normalen an der Berührungsstelle zusammenfallen, d. h. der Stoß soll ein gerader sein.

Wenn die Körper überdies kugelförmig sind, ist der Stoß in diesem Falle zugleich ein centrischer, und es gilt alles, was über den geraden centralen Stoß gesagt wurde. Es gilt aber auch dann noch, wenn die Körper eine beliebige Gestalt besitzen, sobald die Berührungsnormale zugleich die gemeinsame Schwerlinie beider Körper ist. Dies geht aus dem folgenden Lehrsatze hervor.

58. Lehrsatz. Eine Kraft, deren Richtungslinie durch den Schwerpunkt eines starren Körpers geht, kann den letzteren nur in eine fortschreitende Bewegung, nicht in Rotation versetzen.

Anl. z. Bew. Man nehme an, der Körper werde zugleich um irgend eine Schwerlinie in Rotation versetzt. Die Resultierende aller inneren Kräfte, welche an einem beliebigen mat. P. angreifen, läßt sich dann durch zwei Komponenten ersetzen, von denen eine ihm die fortschreitende Bewegung, und die andere die Rotation um die vorausgesetzte Schwerpunktsachse erteilt. Die erste Komponente ist für alle mat. P. von gleicher Masse gleich groß und von übereinstimmender Richtung. Das System aller dieser Komponenten ist äquivalent der äußeren Kraft. Man projiziere nun sämtliche Kräfte auf eine zur Rotationsachse senkrechte Ebene, wähle die Projektion der Achse als Momentenpunkt und wende den Momentensatz (I, § 113) an. Die Momentensumme der zuerst genannten Komponenten wird zu Null, weil der Momentenpunkt die Projektion des Schwerpunktes ist, ebenso das Moment der äußeren Kraft. Es muß also auch die algebraische Summe der Momente der die Rotation bewirkenden Komponenten verschwinden, und da diese alle gleiches Vorzeichen besitzen, muß jede Komponente Null sein. Daraus geht hervor, daß die willkürlich angenommene Rotation nicht zustande kommen kann.

59. In jedem anderen Falle heißt der Stoß excentrisch. Er kann entweder für beide oder nur für einen der zusammenstoßenden Körper excentrisch sein. Ein excentrischer Stoß versetzt, auch wenn er gerade erfolgt, den betreffenden Körper in Rotation. Der Stoßdruck P ist nämlich einer gleich großen und gleich gerichteten centrischen Kraft und einem Kräftepaar äquivalent. Jene verursacht die fortschreitende Bewegung, dieses die Rotation.

Lehrsatz z. Übung. Ein Kräftepaar kann einem starren Körper nur eine Rotation um die zur Ebene des Kräftepaares senkrechte Schwerlinie erteilen. Beweis wie in § 58 mit Anwendung des Komponentensatzes an Stelle des Momentensatzes.

Aufg. 36. Eine Kugel führe einen geraden Stoß gegen einen anderen Körper von beliebiger Gestalt aus, für den der Stoß excentrisch ist. Wie findet man das „reduzierte" Gewicht Q_r des gestoßenen Körpers, das in die Formeln für den geraden centralen Stoß an Stelle von Q_1 einzuführen ist, um die Bewegung der Kugel Q_2 zu berechnen?

Anl. z. L. Der Stoßdruck erteilt dem gestoßenen Körper Q_1 in irgend einem Augenblicke zugleich eine fortschreitende Bewegung und eine Rotation. Die Beschleunigung der vom Stoße getroffenen Stelle von Q_1 setzt sich zusammen aus der Beschleunigung jener und aus der mit der Excentrizität p multiplizierten Beschleunigung der letzteren, wenn sie in Bogenmaß ausgedrückt ist. Sie muß eben so groß sein, als wenn an Stelle des Körpers Q_1 ein anderer vom Gewichte Q_r centrisch getroffen wäre. Unter Anwendung des Momentensatzes für die Ermittelung des Ausdruckes für die Rotationsbeschleunigung giebt dies die Bedingung

$$g \cdot \frac{P}{Q_r} = g \cdot \frac{P}{Q_1} + g \cdot \frac{Pp}{Q_1 \varrho^2} \cdot p,$$

wo ϱ den Trägheitsradius von Q_1 (§ 36) bedeutet. Durch Auflösen findet man Q_r.

60. Die bisher durchgeführten Betrachtungen lassen sich leicht auf den Fall übertragen, daß beide Körper vor dem Stoße fortschreitende Bewegungen besaßen, wenn die Richtungen beider in die Stoßnormale fallen. Dagegen wird der Vorgang erheblich komplizierter, wenn der Stoß gleichzeitig schief und excentrisch ist und wenn die Körper schon vor dem Stoße rotierten. Es treten dann alle im einzelnen beschriebenen Wirkungen gleichzeitig auf.

61. Über die Regeln, welche sich aus der Lehre vom Stoße für die Bau- und Maschinentechnik ergeben. Diese laufen in der Mehrzahl der Fälle darauf hinaus, den Stoß möglichst zu vermeiden. Nur in einzelnen Fällen, wie bei den Rammen, den Hämmern und Pochwerken wird der Stoß absichtlich herbeigeführt, um durch den auftretenden bedeutenden Stoßdruck eine Wirkung zu erzielen, für die man andernfalls viel umständlichere Einrichtungen treffen müßte.

Man vermeidet den Stoß aus zwei Gründen, nämlich einmal

wegen der infolge des hohen Stoßdruckes eintretenden Überanstrengung oder Zerstörung des Materials und dann wegen des damit verbundenen Arbeitsverlustes. Für die Bautechnik kommt indessen nur der erste Grund in Frage. Hier ist es namentlich von Wichtigkeit, solche Baustoffe zu verwenden, welche vor dem Bruche eine größere Formänderungsarbeit aufzunehmen vermögen, also zähe Stoffe zu bevorzugen und spröde Stoffe nach Möglichkeit auszuschließen. (Bevorzugung des Schmiedeeisens vor dem Gußeisen.)

Es möge hier als Beispiel noch das gewöhnliche Straßenpflaster betrachtet werden. Wenn die Oberfläche eines Pflastersteines etwas tiefer liegt als diejenige eines benachbarten, so wird ein Wagenrad, das von diesem zu jenem hinfährt, um den Höhenunterschied herabfallen und den Stein noch weiter einzutreiben suchen. Der Fall ist ganz zu vergleichen mit dem in § 52 besprochenen Einrammen von Pfählen. So lange der Höhenunterschied unter dem dort mit h_0 bezeichneten Werte bleibt, wird der Stein in seiner Lage verharren. Anderenfalls wird der Höhenunterschied fortwährend vergrößert und die Oberfläche des Pflasters wird unebener. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich die Wichtigkeit der möglichst sorgfältigen Ausführung einer Pflasterung, die Stöße möglichst vermeidet (Asphalt).

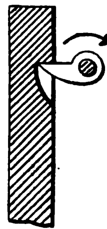
Ähnlich verhält es sich mit schlecht verzahnten Zahnrädern. In irgend einem Augenblicke möge ein gewisses Winkelgeschwindigkeitsverhältnis zwischen den beiden im Eingriffe stehenden Rädern bestehen. Sobald nun ein neuer Zahn zum Eingriffe gelangt, sucht derselbe ein etwas abweichendes Geschwindigkeitsverhältnis herzustellen, wenn die Verzahnung nicht genau richtig ist. Es ergiebt sich damit ein Stoß beim Eingriffe, der um so gefährlicher ist, je schneller die Räder umlaufen. Der häufig wiederholte Stoß der neu eingreifenden Zähne verursacht das bekannte klappernde Geräusch, führt häufig zum Bruche oder zur schnellen Abnützung der Zähne und hat Arbeitsverluste sowie einen unregelmäßigen Gang, welcher die Güte der von der Maschine gelieferten Fabrikate beeinträchtigt, zur Folge.

Bei hin- und hergehenden Bewegungen, welche bei den Maschinen

so häufig vorkommen, soll man stets vermeiden, die Bewegung stoßweise beginnen oder enden zu lassen, namentlich wenn es sich um größere Massen und große Geschwindigkeiten handelt. Wo es nicht anders geht kann man wenigstens durch Einschaltung einer Feder die Stoßperiode verlängern und den Stoßdruck damit vermindern. (Nachteile der sogenannten Klinken, z. B. bei der Steuerung von Farcot.)

62. Als Beispiel sei noch die Bewegung eines Pochwerks von einer Daumenwelle aus betrachtet. Fig. 9 zeigt den oberen Teil des Pochstempels im Längsschnitte und die Welle mit dem zugehörigen Daumen. Beim Auftreffen des Daumens entsteht ein Stoß, welcher hier besonders wegen des Arbeitsverlustes schädlich wirkt. Man kann hier nahezu die ganze während der ersten Stoßperiode verlorene lebendige Kraft (§ 41) als wirklichen Verlust in Rechnung stellen. Wenn mit der Antriebswelle, wie es gewöhnlich der Fall ist, sehr große Massen in Verbindung stehen, läßt sich der Verlust gleich $\frac{Q_1}{2g} \cdot v_2^2$ setzen, indem im Nenner des Ausdruckes in § 41 Q_1 gegen Q_2 vernachlässigt werden kann. Andernfalls ist für Q_2 das „reduzierte" Gewicht in derselben Weise in Rechnung zu stellen wie in Aufg. 36.

Fig. 9.



Der Arbeitsverlust durch den Stoß läßt sich hier dadurch vermindern, daß man die Daumenwelle langsam umlaufen läßt. Weit besser wird aber der Zweck dadurch erreicht, daß man an Stelle des Daumens eine Kurvenscheibe treten läßt, welche bei Beginn des Stoßes nur eine geringe Geschwindigkeit in der Richtung der Berührungsnormalen besitzt und dem Pochstempel im weiteren Verlaufe eine nahezu gleichförmig beschleunigte Bewegung erteilt. Es tritt zwar dann ein Arbeitsverlust für die Überwindung der Reibung zwischen der Kurvenscheibe und ihrer Angriffsfläche am Pochstempel ein, der aber erheblich geringer ist als der sonst durch den Stoß herbeigeführte.

Aufg. 37. Wieviel Prozent der ganzen Arbeitsleistung entfallen auf den Stoßverlust bei einem nach Fig. 9 konstruierten Pochwerke, wenn der Hub $0{,}6^{\text{m}}$, das Stempelgewicht 100^{kgr}, die Umfangs-

geschwindigkeit des Daumens 0,4 m pro Sekunde beträgt und a) das reduzierte Gewicht der Welle einschließlich aller mit ihr umlaufenden Teile 800 kgr ist; b) wenn es so groß ist, daß der oben angegebene Näherungswert für den Stoßverlust eingesetzt werden kann? Wie ändert sich die gefundene Zahl, wenn die Geschwindigkeit der Daumenwelle verdoppelt wird?

Zweiter Abschnitt.

Mechanik der flüssigen Körper. I.

Erstes Kapitel.

Gleichgewicht der vollkommen flüssigen Körper.

63. Die flüssigen Körper setzen weder dem gegenseitigen Verschieben noch der Trennung ihrer Teile einen merklichen Widerstand entgegen. Sie vermögen daher weder Scherkräfte (oder innere Reibungen) noch Zugkräfte in größerem Maße aufzunehmen. Unter einer vollkommenen Flüssigkeit verstehen wir einen Körper, der gar keine Kräfte dieser Art zu übertragen vermag.

Die in der Natur vorkommenden Flüssigkeiten zeigen größere oder geringere Abweichungen von diesem Verhalten, welche im weiteren Verlaufe besprochen werden sollen.

64. Zur Berechnung der inneren Kräfte, welche in einem flüssigen Körper auftreten, bedient man sich desselben Verfahrens, das in der Festigkeitslehre zur Lösung der gleichen Aufgabe angewendet wurde. Man denkt sich nämlich den Körper durch einen Schnitt in zwei Teile getrennt und untersucht das Gleichgewicht der an dem einen Teile angreifenden Kräfte, indem man sich die an der Trennungsfläche auftretenden inneren Kräfte durch gleich große äußere ersetzt denkt.

Nach § 63 können diese Kräfte nur Druckkräfte sein. Bei gleichmäßiger Verteilung derselben über die Schnittfläche wird der auf die Flächeneinheit (1 qcm) entfallende Druck die spezifische

Druckspannung genannt. Im anderen Falle ist unter der spezifischen Druckspannung an einer gegebenen Stelle und für eine gegebene Schnittfläche jener Druck zu verstehen, welcher auf die Flächeneinheit kommen würde, wenn die Verteilung gleichmäßig wäre und der Druck überall mit dem an der betrachteten Stelle übereinstimmte.

65. Die in der Natur vorkommenden Flüssigkeiten zeigen ein sehr verschiedenes Verhalten gegen Druckkräfte. Die tropfbaren Flüssigkeiten sind nahezu unzusammendrückbar; sie können näherungsweise als inkompressible Flüssigkeiten angesehen werden. Die luftförmigen Flüssigkeiten sind dagegen als elastische Flüssigkeiten aufzufassen.

Die in diesem Kapitel enthaltenen Lehrsätze gelten aber für beide Aggregatzustände.

66. Lehrsatz. Für jede Schnittfläche, welche man durch einen Punkt im Innern einer vollkommenen Flüssigkeit legen kann, ist die spezifische Druckspannung in der Nachbarschaft jenes Punktes von gleicher Größe.

Anl. z. Bew. Man denke sich in der Nachbarschaft des Punktes A (Fig. 10a) ein rechtwinkliges Prisma durch fünf

Fig. 10a.

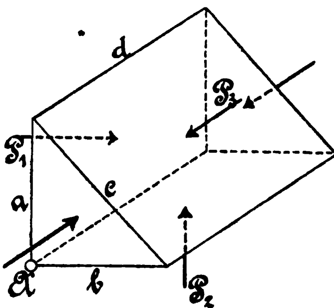
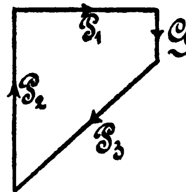


Fig. 10b.



Schnittflächen abgegrenzt, dessen Basis abc ein rechtwinkliges Dreieck bildet. An demselben wirken die fünf Druckkräfte auf die Seitenflächen und die Schwere. Der zweite Hauptlehrsatz ergiebt, daß die auf abc und die gegenüberliegende Fläche wirkenden Kräfte für sich im Gleichgewicht stehen müssen, wenn a in die Richtung der Schwere fällt.

Für die vier übrigen Kräfte läßt sich das Kräftepolygon Fig. 10b zeichnen. Unter der Bedingung, daß die Seitenflächen sehr klein sind, kann man $P_1 = p_1 ad$; $P_2 = p_2 . bd$; $P_3 = p_3 cd$ setzen, wo die p die spezifischen Druckspannungen für die betreffenden Schnittrichtungen bedeuten. Eigentlich muß man sich alle Seiten bis auf Null verkürzt denken, damit die Fläche cd durch den Punkt A hindurchgeht.

Je kleiner aber die Seiten angenommen werden, desto mehr verschwindet das Gewicht G des Flüssigkeitsvolumens neben den Kräften P. Denkt man sich nämlich alle Kanten auf $^1/_{10}$ ihrer früheren Länge verkürzt, so nehmen die P auf $^1/_{100}$, das Gewicht G aber auf $^1/_{1000}$ des früheren Wertes ab. Wenn wir daher die Fläche cd parallel mit sich selbst verschieben, bis sie durch A hindurchgeht, so wird zuletzt aus dem Kräfteviereck ein Kräftedreieck, das dem Dreiecke abc ähnlich ist. Wir haben daher

$$p_1 ad : p_2 bd : p_3 cd = a : b : c$$

und daraus folgt

$$p_1 = p_2 = p_3 .$$

Für jede beliebig geneigte Schnittfläche ist also der spezifische Druck so groß, als der auf die horizontale Schnittfläche. Die inneren Kräfte in einer vollkommenen Flüssigkeit sind daher vollständig bekannt, wenn man in jedem Punkte den spezifischen Druck für eine beliebige Schnittrichtung kennt. Man nennt denselben kurz den Druck der Flüssigkeit an jenem Punkte.

67. **Zusatz.** Der Lehrsatz bleibt auch bei jedem beliebigen Bewegungszustande einer vollkommenen Flüssigkeit giltig.

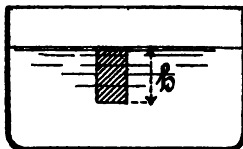
In diesem Falle halten sich zwar die an dem Prisma wirkenden Kräfte nicht im Gleichgewichte, sie vereinigen sich vielmehr zu einer Resultierenden, durch welche die Tangential- und die Centripetalbeschleunigung des Prismas hervorgerufen werden. Wenn die Kanten des Prismas kleiner werden, nimmt aber diese Resultierende proportional mit dem Gewichte G ab und sie verschwindet daher in der Grenze ebenso wie G selbst neben den Kräften P. Damit ist aber gezeigt, daß die frühere Betrachtung auch auf diesen Fall anwendbar bleibt.

Der Satz bleibt dagegen nicht mehr streng giltig, wenn in einer nicht vollkommenen Flüssigkeit Tangentialkräfte in den Schnittflächen übertragen werden können.

68. Der Druck der Flüssigkeit an einer bestimmten Stelle kann auf drei verschiedene Arten angegeben werden, entweder nämlich so wie in der Festigkeitslehre in kgr pro qcm, oder in Flüssigkeitssäulen, oder in Atmosphären. Angaben der beiden letzten Arten lassen sich aber immer leicht auf kgr pro qcm umrechnen.

Wenn in einem Gefäße sich eine vollkommene Flüssigkeit in Ruhe befindet, läßt sich der Druck an irgend einer Stelle auf folgende Weise ermitteln. Man lege eine kleine horizontale Schnittfläche durch den Punkt und errichte über derselben als Grundfläche ein senkrechtes Prisma (oder einen Cylinder) bis zum Wasserspiegel (Fig. 11). An dem so abgegrenzten Wasserkörper wirken die Druckkräfte auf die Basis und die senkrechten Seitenflächen, sowie die Schwere. Nach dem für die vertikale Projektionsrichtung angewendeten zweiten Hauptlehrsatze ist der Basisdruck gleich dem Gewichte des Prismas, wenn auf den Flüssigkeitsspiegel kein Druck einwirkt. Man hat daher

Fig. 11.



$$p \cdot f = h \cdot f \cdot \gamma \quad \text{oder} \quad p = h \cdot \gamma,$$

wenn f die Basis, h die Höhe des Prismas, p den Druck und γ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet. Wirkt auf die Spiegelfläche ein Druck p_0, so wird

$$p = p_0 + h \cdot \gamma.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen läßt sich eine auf Flüssigkeitssäulen bezügliche Angabe leicht auf spezifische Druckangabe umrechnen. Unter einer Atmosphäre versteht man

1 Atm. = 760 mm Quecksilbersäule = 10 333 mm Wassersäule
= 1,0333 kgr pro qcm = 10 333 kgr pro qm.

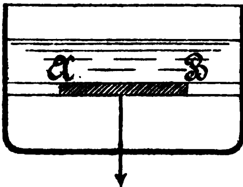
Bei den gewöhnlichen technischen Anwendungen wird aber in der Regel unter 1 Atm. ein spezifischer Druck von 1 kgr pro qcm verstanden.

69. Man erhält ein klares Bild von der Verteilung des Druckes in einer ruhenden oder sich bewegenden Flüssigkeit, wenn man sich durch alle Punkte gleichen Druckes Flächen gelegt denkt und einige dieser Flächen, welche bestimmten, gleich weit von einander abstehenden Drucken entsprechen, verzeichnet.

Lehrsatz. Die Flächen gleichen Druckes stehen in einer vollkommenen Flüssigkeit für den Fall des Gleichgewichts überall senkrecht zur Richtung der resultierenden äußeren Kraft.

Anl. z. Bew. Man denke sich ein kleines rechtwinkliges Parallelepipedon zwischen den Punkten A und B (Fig. 12) abgegrenzt, von dem eine Kantenrichtung mit der Richtung der äußeren resultierenden Kraft (der Schwere z. B.) zusammenfällt. Die Grundflächen bei A und B sollen so klein gewählt sein, daß ohne Fehler an Stelle des spezifischen Druckes bei A und B der mittlere spezifische Druck auf die Grundflächen gesetzt werden kann. Aus dem zweiten Hauptlehrsatze, angewendet auf die Projektionen zur Längsrichtung des Prismas, folgt dann, daß A und B auf einer Fläche gleichen Druckes liegen.

Fig. 12.



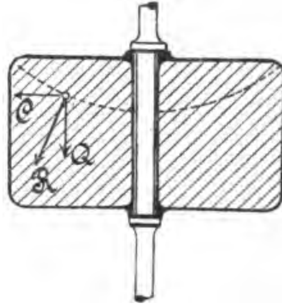
70. Die Flächen gleichen Druckes sind demnach in einer ruhenden Flüssigkeit gewöhnlich horizontale Ebenen. Dasselbe muß daher auch von dem Flüssigkeitsspiegel gelten.

Eine andere Gestalt nehmen die Flächen gleichen Druckes z. B. dann an, wenn die Flüssigkeit magnetisch ist und der Einwirkung eines kräftigen Magneten unterworfen wird. An die Stelle der Schwerkraft tritt hier die Resultierende aus dieser und den magnetischen Kräften.

Für eine bewegte Flüssigkeitsmasse gilt der Satz im allgemeinen nicht mehr. Solche Fälle lassen sich aber häufig leicht, wie der folgende auf den früheren zurückführen. Von besonderer Wichtigkeit ist nämlich die Druckverteilung in einer rotierenden Flüssigkeitsmasse, die sich nach Art der Fig. 13 in einem allseitig geschlossenen Gefäße befinden möge.

Bei gleichförmiger Rotation halten sich die an einem Flüssigkeitsteilchen wirkenden Kräfte nicht im Gleichgewichte, sondern sie vereinigen sich zu einer Resultierenden, welche die Centripetalkraft bildet. Um die gleiche Druckverteilung in der ruhenden Flüssigkeit hervorzubringen, müßte man daher zur Herstellung des Gleichgewichtes an jedem Flüssigkeitsteilchen eine der Centripetalkraft entgegengesetzt gleiche Kraft, d. h. eine der Centrifugalkraft gleiche Kraft von außen her anbringen. Damit ist die Aufgabe der Ermittelung der Druckverteilung auf diejenige für eine ruhende Flüssigkeit zurückgeführt. Man konstruiere an jeder Stelle die Resultierende R aus der Centrifugalkraft C und dem Gewichte Q (Fig. 13). Die Linien gleichen Druckes stehen dann überall rechtwinklig zu R.

Fig. 13.



Aufg. 38. Konstruiere eine Linie gleichen Druckes für den Fall der Fig. 13, wenn der äußere Durchmesser 1,5 m beträgt und das Gefäß mit der Flüssigkeitsmasse 40 Touren in der Minute macht. (Die Linie wird, wie man mit Hilfe der höheren Mathematik zeigen kann, eine Parabel, deren Achse mit der Rotationsachse zusammenfällt.)

Aufg. 39. Eine Centrifugalpumpe hat 0,6 m äußeren Durchmesser und macht 500 Touren. Wieviel größer ist die Druckhöhe an der Peripherie, als die im Centrum?

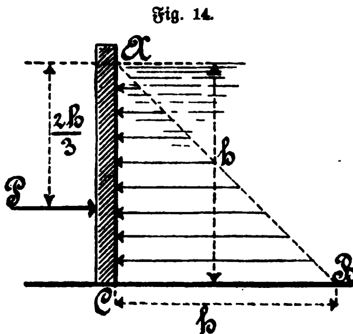
Anl. z. L. Man berechne für irgend einen Sektor die Größe der ganzen Centrifugalkraft nach § 8. Durch Division mit der zugehörigen äußeren Wandfläche erhält man den spezifischen Wanddruck, der sich nach § 68 durch eine Druckhöhe darstellen läßt. Die Flächen gleichen Druckes lassen sich hier nahezu als senkrechte Cylinderflächen ansehen, weil die Centrifugalkräfte viel größer sind als die Gewichte.

71. Der Druck der Flüssigkeit gegen eine Gefäßwand ergiebt sich durch Multiplikation des spezifischen Druckes mit dem Flächeninhalte der Wand, wenn der erstere überall gleich groß ist. Im andern Falle muß man nach den gewöhnlichen Regeln aus den Einzelwirkungen eine Resultierende bilden.

Der Druck gegen eine senkrechte Wand (Fig. 14) wird

auf folgendem Wege gefunden. Man erhält eine graphische Darstellung der Druckverteilung durch Ziehen der Linie AB unter einem Winkel von 45°. Die Aufgabe, den resultierenden Druck zu bestimmen, fällt zusammen mit derjenigen, das resultierende Gewicht des Dreiecks ABC zu ermitteln, wenn die Richtung der Schwere mit der Kathete BC zusammenfällt. Man erkennt daraus, daß die Kraft P, welche dem Wasserdrucke das Gleichgewicht hält, gleich $\frac{bh^2}{2} \cdot \gamma$ ist (b die Länge der Wand senkrecht zur Bildfläche) und in der Tiefe $\frac{2h}{3}$ vom Wasserspiegel aus gerechnet liegt.

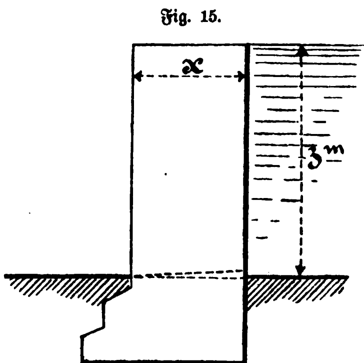
Fig. 14.



Aufg. 40. Ermittele die Kraft P für den Fall, daß die Wand a) nach vorn, b) nach hinten überhängt.

Aufg. 41. Wie groß muß die Stärke x einer Teichmauer (Fig. 15) sein, um ein Umwerfen um die vordere Kante zu vermeiden a) wenn vorausgesetzt werden darf, daß der Druck nur auf die Hinterfläche wirkt; b) wenn ein Öffnen der Sockelfuge befürchtet werden muß, so daß das Wasser in dieselbe eindringen kann; c) wie groß muß x sein, um die Gefahr eines Öffnens der Fuge auszuschließen? (I, § 223.) Das spezifische Gewicht des Mauerwerks sei = 2,4.

Fig. 15.



Aufg. 42. a) Wie groß ist die Kraft, welche man aufwenden muß, um das Schutzbrett eines Wehres in die Höhe zu ziehen, wenn es 1,2 m breit, 1,5 m hoch ist und 80 kgr wiegt? (Reibungscoefficient = 0,6.) b) Wie groß ist die Kraft zur Bewegung des Steuerungsschiebers einer Dampfmaschine von 150 qcm Fläche, wenn der Überdruck des Dampfes 4,5 Atm. beträgt? ($f = \frac{1}{7}$.) c) Wie kann man den Schieber konstruieren, um diese Kraft zu verringern? (Entlastete Schieber.)

Aufg. 43. Wie kommt es, daß der Bodendruck bei einem sich nach oben verjüngenden Wassergefäße größer ist, als das Gewicht des Wassers? (Hydrostatisches Paradoxon.)

72. Lehrsatz. In einem irgendwie verzweigten Rohrnetze ist der Druck an allen in einer Horizontalebene liegenden Punkten von gleicher Größe, wenn die Flüssigkeit in Ruhe und anderen äußeren Kräften als der Schwere nicht ausgesetzt ist.

Anl. z. Bew. Die Flächen gleichen Druckes sind nach § 69 Horizontalebenen und der Druckhöhenunterschied für zwei Ebenen dieser Art ist gleich dem senkrechten Abstande derselben. Der Satz folgt daraus unmittelbar.

Zusatz. Die Flüssigkeitsspiegel in kommunizierenden Röhren stehen unter denselben Voraussetzungen gleich hoch.

Aufg. 44. Das untere Ende und der eine Schenkel einer U-förmig gebogenen Röhre sind mit Quecksilber, der obere Teil des anderen Schenkels ist mit Wasser gefüllt. Der Wasserspiegel steht um 25^{cm} höher als der Quecksilberspiegel des anderen Schenkels; wo liegt die Trennungsfläche beider Flüssigkeiten, wenn das spezifische Gewicht des Quecksilbers = 13,6 ist?

73. Lehrsatz. Die Trennungsfläche von zwei in demselben Gefäße enthaltenen verschieden schweren Flüssigkeiten ist eine Fläche gleichen Druckes.

Anl. z. Bew. Sollten zwei Punkte der Trennungsfläche nicht auf einer Fläche gleichen Druckes liegen, so wäre der Druckhöhenunterschied gleich dem Unterschiede in der Höhenlage ausgedrückt in einer Flüssigkeitssäule einmal von geringerem und dann von größerem spezifischen Gewichte. Es könnte dann wenigstens an einem der beiden Punkte kein Gleichgewicht stattfinden. — Die Trennungsfläche verschiebt sich so, daß sie sich einer Fläche gleichen Druckes nähert, wenn die leichtere, und im umgekehrten Sinne, wenn die schwerere Flüssigkeit oben liegt. Daraus folgt zugleich, daß das Gleichgewicht nur im ersten Falle stabil sein kann.

74. Wenn die Flüssigkeitsmasse in Bewegung ist, erleiden alle diese Sätze Abänderungen. Wenn die Bewegungen sehr langsam erfolgen, nähert sich aber die Druckverteilung der hier besprochenen und man kann mit hinreichender Annäherung die Berechnung auf

Grund derselben durchführen. Es trifft dies z. B. meistens zu bei den sogenannten Wassersäulenmaschinen, den hydraulischen Pressen, Accumulatoren und Aufzügen. Ratsam ist es allerdings stets sich davon zu überzeugen, in welchem Grade die vorausgesetzte Druckverteilung sich während des Ganges dieser Maschinen infolge der Bewegungen der Flüssigkeitsmasse ändert. Für eine erste Annäherung reicht aber die einfachere Betrachtung stets aus.

75. Wenn eine unter dem spezifischen Drucke p stehende Flüssigkeit einen Kolben vor sich her schiebt, so ist die von derselben geleistete Arbeit A, wenn f die Kolbenfläche und s den Kolbenweg angiebt,

$$A = p f s.$$

Das Produkt fs giebt aber das Volumen V an, welches von der Kolbenfläche bei der Bewegung beschrieben wurde. Man hat daher auch

$$A = p \cdot V.$$

Lehrsatz. Die vorstehende Formel für die Arbeit, welche von einer sich sehr langsam ausdehnenden Flüssigkeit (einem Gase) geleistet wird, gilt stets, wenn p an der in Bewegung begriffenen Oberfläche überall denselben Wert hat; andernfalls ist sie zu ersetzen durch

$$A = \sum p \cdot \varDelta V,$$

wo $\varDelta V$ den Volumenzuwachs an derjenigen Stelle angiebt, auf welche sich p bezieht.

Anl. z. Bew. Man betrachte zwei unmittelbar aufeinander folgende Lagen der Oberfläche. Der Satz ergiebt sich durch die Ermittelung der an jedem beliebigen Oberflächenteilchen geleisteten Arbeit und Summierung über die ganze Oberfläche.

Eine Volumenabnahme an irgend einer Stelle ist negativ in Rechnung zu stellen.

Zusatz. Zur Änderung der Gestalt einer vollkommenen Flüssigkeit ohne Volumenänderung wird weder Arbeit verbraucht, noch wird infolge derselben Arbeit gewonnen.

Bew. wie oben. Bewegt sich bei der Gestaltsänderung der Schwerpunkt der Flüssigkeitsmasse nach unten, so ist die von der Schwere geleistete Arbeit mit in Rechnung zu ziehen.

Der Satz ist, wie die vorausgegangenen, nur für vollkommene Flüssigkeiten giltig. Man kann auch umgekehrt sagen, daß eine vollkommene Flüssigkeit eine solche ist, für welche eine Änderung der Gestalt ohne Volumenänderung nicht mit einer Arbeitsleistung verbunden ist und aus dieser Definition die vorausgegangenen Sätze ableiten.

Aufg. 45. Leite die Formel für den Druck ab, den man mit einer hydraulischen Presse ausüben kann, wenn am Pumpenhebel die Kraft P wirkt.

Aufg. 46. Ein hydraulischer Personenaufzug in einem Wohnhause wiegt mit Belastung 1200 ^{kgr}. Wie groß muß der Durchmesser des Stempels sein, wenn die Druckhöhe des zum Betriebe verwendeten Wasserleitungswassers im ungünstigsten Falle 32 ^{m} beträgt?

Aufg. 47. Ein hydraulischer Accumulator faßt 30 ^{cbm} Wasser, die unter einem Drucke von 60 Atm. stehen. Wie lange muß eine fünfpferdige Dampfmaschine arbeiten um ihn zu füllen, wenn der Wirkungsgrad gleich 0,7 ist?

Aufg. 48. Von einer Wasserleitung mit 25 ^{m} Druckhöhe wird ein Wassermotor betrieben. Wie hoch stellen sich stündlich die Betriebskosten einer Pferdekraft, wenn der cbm Wasser mit 8 Pfennigen berechnet wird und der Wirkungsgrad 0,8 beträgt?

76. Gleichgewicht schwimmender Körper. Der in das Wasser eingetauchte Teil der Oberfläche eines schwimmenden Körpers erfährt an jeder Stelle einen spezifischen Druck, dessen Druckhöhe gleich der Tiefe der betreffenden Stelle unter dem Wasserspiegel ist. Die Resultierende aller dieser Druckkräfte heißt der Auftrieb, den der schwimmende Körper erfährt. Das von einer mit dem Wasserspiegel zusammenfallenden horizontalen Ebene und dem eingetauchten Teile der Oberfläche abgegrenzte Volumen wird das Volumen des verdrängten Wassers genannt.

Lehrsatz. Der Auftrieb ist gleich dem Gewichte des verdrängten Wasservolumens, geht durch den Schwerpunkt des letzteren und ist senkrecht nach oben gerichtet (Archimedisches Prinzip).

Anl. z. Bew. Wenn der schwimmende Körper entfernt und das von ihm verdrängte Volumen mit Wasser ausgefüllt wird, besteht Gleichgewicht. Auf die Oberfläche dieses Wasserkörpers wirken aber ganz dieselben Druckkräfte wie vorher, woraus der Satz unmittelbar folgt.

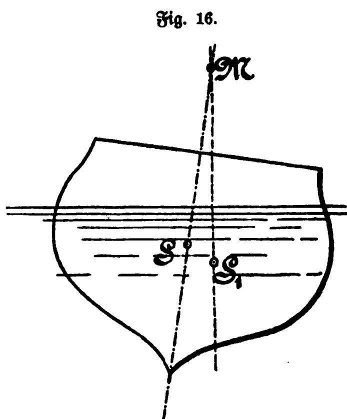
Zusatz. Ein schwimmender Körper kann nur dann im Gleichgewichte sein, wenn sein Gewicht gleich dem Gewichte des verdrängten Wasservolumens ist und wenn sein Schwerpunkt und der Schwerpunkt des verdrängten Volumens auf einer senkrechten Geraden liegen.

77. Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers kann stabil, labil oder indifferent sein.

Wird der Körper durch äußere Einflüsse ein wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt, so daß die beiden Schwerpunkte nicht mehr in einer senkrechten Geraden liegen, so bilden Auftrieb und Gewicht des Körpers ein Kräftepaar, das den Körper in Drehung versetzt. Erfolgt die Drehung in solchem Sinne, daß sich der Körper der Gleichgewichtslage nähert, so ist das Gleichgewicht stabil, im entgegengesetzten Falle labil. Indifferent ist es, wenn nach einer kleinen Drehung die beiden Schwerpunkte immer noch auf einer Senkrechten liegen; der Körper hat dann unendlich viele Gleichgewichtslagen.

Von Wichtigkeit ist die Lehre vom stabilen Gleichgewichte besonders für den Schiffsbau. Die Bewegungen eines Schiffes um die Gleichgewichtslage werden das Schlingern und das Stampfen genannt, je nachdem sie in pendelnden Bewegungen um die Längs- oder um die Querachse bestehen.

Fig. 16.



78. Den Punkt M (Fig. 16) der Symmetrieebene eines Schiffes, welcher über dem Schwerpunkte S_1 des verdrängten Wasservolumens bei schräger Stellung des Schiffes liegt, nennt man das Metacentrum.

Lehrsatz. Das Gleichgewicht eines Schiffes ist stabil, indifferent oder labil, je nachdem das Metacentrum über dem Schiffsschwerpunkte liegt oder mit ihm zusammenfällt oder darunter liegt (Beweis ergiebt sich leicht aus der Figur).

79. Die Lage des Metacentrums ist im allgemeinen abhängig von dem Winkel, um welchen das Schiff aus der Gleichgewichtslage verschoben wurde. Bei den gewöhnlich angewendeten Schiffsquerschnitten rückt das Metacentrum in die Höhe, wenn der Winkel wächst. So lange der Ausschlag nur gering ist, verändert das Metacentrum seine Lage aber nicht erheblich.

Zur Berechnung der Schwingungsdauer der schlingernden Bewegung läßt sich das Schiff mit einem physischen Pendel vergleichen. Man erhält die reduzierte Pendellänge, wenn man in der Schlußformel des § 22 für J das polare Trägheitsmoment des Schiffes in Bezug auf die Schwerpunktsachse, für Q das Gewicht desselben und für s die Entfernung MS zwischen Metacentrum und Schwerpunkt setzt.

Aufg. 49. Ermittele für einen trapezförmigen Schiffsquerschnitt die Lage des Metacentrums bei verschiedenen Stellungen durch Konstruktion.

Aufg. 50. Leite die Formel für die Höhenlage des Metacentrums bei rechteckigem Querschnitte ab. Was läßt sich dafür annähernd setzen, wenn der Winkel zwischen der Symmetrieebene des Schiffes und der Richtung der Schwere sehr klein bleibt?

Aufg. 51. Wie groß ist im zuletzt erwähnten Falle die Schwingungsdauer der schlingernden Bewegung, wenn der schwimmende Körper als ein rechteckiger Balken vom spezifischen Gewichte 0,8, der Höhe $h = 2{,}0^{\mathrm{m}}$ und der Breite $b = 6{,}8^{\mathrm{m}}$ angesehen werden kann? (Das polare Trägheitsmoment eines Rechtecks ist $J = bh\,\frac{h^2 + b^2}{12}$.) Wie groß ist die Schwingungsdauer der stampfenden Bewegung, wenn die Länge des Balkens 30^{m} beträgt?

Aufg. 52. Wo liegt das Metacentrum bei cylindrischer Gestalt der eingetauchten Oberfläche?

Zweites Kapitel.

Bewegungserscheinungen tropfbarer Flüssigkeiten.

80. Ausfluß aus Gefäßen. Wenn in der Wand eines Gefäßes plötzlich eine Öffnung hergestellt wird, wird das in der Nähe befindliche Wasser herausgedrängt. Der Druck sinkt in der

Nachbarschaft und die entstehenden Druckunterschiede veranlassen Bewegungen der einzelnen Wasserteilchen. Nach einiger Zeit stellt sich ein dauernder Zustand her, wenn für einen stetigen Ersatz des ausfließenden Wassers gesorgt wird. An jeder Stelle des Raumes nehmen die dort befindlichen Wasserteilchen eine Geschwindigkeit an, deren Größe und Richtung sich im Laufe der Zeit nicht mehr ändern, wenn äußere Störungen fern gehalten werden. Die Bahn eines Wasserteilchens heißt eine Stromlinie; wenn auf die räumliche Ausdehnung des Wasserteilchens Rücksicht genommen wird, heißt das beschriebene Volumen ein Stromfaden. Die Oberfläche des Stromfadens wird von Stromlinien gebildet. Es soll jetzt die stetige Ausflußbewegung näher betrachtet werden, bei welcher sich die Gestalt der Stromlinien und ihre räumliche Lage im Verlaufe der Zeit nicht ändern.

81. Lehrsatz. Das Wasservolumen, welches in der Zeiteinheit durch einen Stromfaden fließt, ist gleich dem Produkte aus dem Querschnitte des Stromfadens an irgend einer Stelle desselben und der dort bestehenden Stromgeschwindigkeit.

Anl. z. Bew. Das Wasser, welches in der Sekunde durch die Querschnittsfläche f mit der Geschwindigkeit v fließt, vermag einen Cylinder (oder ein Prisma) von der Grundfläche f und der Höhe v zu füllen. Das Volumen desselben ist daher gleich $f \cdot v$.

Zusatz. Die Geschwindigkeit der Strömung an verschiedenen Stellen desselben Stromfadens ist umgekehrt proportional dem Querschnitte.

Aus der Definition des Stromfadens folgt nämlich, daß durch die Oberfläche desselben keine Wasserbewegung stattfindet. Das zwischen zwei Querschnitten liegende Stück eines Stromfadens vermag aber wegen der Unzusammendrückbarkeit tropfbarer Flüssigkeiten immer nur dieselbe Wassermenge zu fassen. Der Zufluß muß daher gleich dem Abflusse sein oder

$$f_1 v_1 = f_2 v_2 \quad \text{woraus} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{f_2}{f_1}.$$

In diesem Satze ist die sogenannte Kontinuitätsbedingung für die Bewegung unzusammendrückbarer Flüssigkeiten ausgesprochen.

82. Wenn die Stromlinien bekannt sind, lassen sich die Flächen gleichen Druckes ermitteln und umgekehrt. Die eingehendere Untersuchung dieser Beziehungen läßt sich aber nur mit den Hilfsmitteln der höheren Mathematik durchführen. Hier genügen einige einfache Betrachtungen.

Unter einer Normalfläche sei eine Fläche verstanden, die rechtwinklig zu allen sie durchkreuzenden Stromlinien steht. Unter gewissen Umständen sind die Normalflächen selbst die Flächen gleichen Druckes; in anderen Fällen lassen sich diese aus jenen ermitteln. Das erste trifft zu, wenn der Ausfluß durch einen so starken Überdruck bewirkt wird, daß dagegen der Antrieb durch die Schwere vernachlässigt werden kann und wenn außerdem die Krümmung der Stromlinien (oder die Geschwindigkeit längs derselben) so klein bleibt, daß die Centripetalkraft für die Richtungsänderung unerheblich ist. Dies folgt nämlich daraus, daß durch Druckunterschiede Bewegungen hervorgerufen werden müßten, was für die Richtung senkrecht zu den Stromlinien gegen die Voraussetzung verstößt.

Im anderen Falle zeigen zwei Punkte einer Normalfläche einen Druckhöhenunterschied, der gleich dem Höhenunterschiede derselben vermehrt um den die Centripetalbeschleunigung veranlassenden Druckunterschied zu setzen ist. Der letztere läßt sich in ähnlicher Weise ermitteln wie in § 70 und man vermag dann eine Reihe von Punkten verschiedener Normalflächen aufzufinden, welche einer Fläche gleichen Druckes angehören.

83. Es sei jetzt f_1 der Eintritts-, f_2 der Ausgangsquerschnitt eines Stromfadenstückes. Die Arbeit, welche geleistet wird, um das Volumen $f_1 v_1$ durch f_1 zu treiben, ist nach § 75 gleich $p_1 f_1 v_1$. Dem steht die Arbeit der im Querschnitte f_2 der Bewegung entgegenwirkenden Kräfte gegenüber. Der Unterschied beider Arbeiten vermehrt um die Arbeit der Schwere kann nur zur Erzeugung lebendiger Kraft verwendet worden sein, denn die auf den Mantel des Stromfadenstückes wirkenden Druckkräfte leisten keine Arbeiten, da sie senkrecht zur Wegerichtung stehen, und bei einer vollkommenen Flüssigkeit kommen innere Reibungen, welche einen Teil der geleisteten Arbeit aufzehren, nicht vor. Man hat daher

$$p_1 f_1 v_1 - p_2 f_2 v_2 + \gamma f_1 v_1 H = \frac{\gamma f_1 v_1}{g}\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right),$$

worin H den Höhenunterschied zwischen f_1 und f_2 angiebt, der positiv gerechnet ist, wenn f_1 oberhalb f_2 liegt.

Führt man für p_1 und p_2 die Druckhöhen h_1 und h_2 ein und beachtet, daß $f_1 v_1 = f_2 v_2$ ist, so folgt

$$h_2 - h_1 = H - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = H - \frac{v_1^2}{2g} \cdot \frac{f_1^2 - f_2^2}{f_2^2}.$$

Der Ausdruck $\frac{v_1^2}{2g}$ stellt eine Länge dar. Er ist nämlich gleich derjenigen Fallhöhe, welche ein Körper im freien Falle durchlaufen müßte, um die Geschwindigkeit v_1 zu erlangen. Mit Rücksicht auf die vorstehende Gleichung nennt man dieselbe die **Geschwindigkeitshöhe**. Führt man dafür zur Abkürzung die Bezeichnung $\mathfrak{H}_1$ ein, so geht die Gleichung über in

$$h_2 + \mathfrak{H}_2 = H + h_1 + \mathfrak{H}_1,$$

während zwischen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ noch die Beziehung besteht (§ 81)

$$\frac{\mathfrak{H}_1}{\mathfrak{H}_2} = \frac{f_2^2}{f_1^2}.$$

84. Betrachtet man zwei zwischen denselben Normalflächen liegende Stromfadenstücke, so hat $h_1 - h_2$ in dem in § 82 bezeichneten einfachsten Falle für beide denselben Wert und es muß sich daher auch die Geschwindigkeitshöhe bei beiden um gleichviel ändern. Bei sehr benachbarten Stromfäden unterscheidet sich jedenfalls H nur unmerklich und dasselbe gilt von den die Centripetalbeschleunigung hervorrufenden Druckhöhenunterschieden auf den Normalflächen. Man erkennt daraus, daß sich bei vollkommenen Flüssigkeiten die Geschwindigkeit von einer Stromlinie zu benachbarten nur kontinuierlich ändern kann. Um so mehr trifft dies bei den in der Natur vorkommenden Flüssigkeiten (z. B. beim Wasser) zu, weil hier die Reibung zwischen den einzelnen Stromfäden auf einen Ausgleich von Geschwindigkeitsunterschieden benachbarter Stromfäden hinwirkt.

85. **Die Geschwindigkeit v, mit welcher ein Flüssigkeitsstrahl aus einem Gefäße austritt, ist bei einer vollkommenen Flüssigkeit**

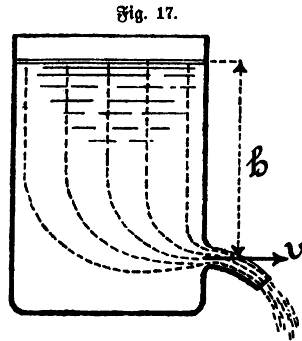
$$v = \sqrt{2gh} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{H} = h$$

(vgl. Fig. 17, in welcher einige Stromlinien ihrem ungefähren Verlaufe nach eingetragen sind).

Der Satz folgt aus der Formel in § 83, wenn man $h_1 = h_2 = 0$, $H = h$, $v_1 = 0$ und $v_2 = v$ setzt. Man beweist

ihn aber besser direkt, indem man die von der Schwere geleistete Arbeit gleich der lebendigen Kraft des ausströmenden Wassers setzt. Aus $Qh = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{2}$, wo Q irgend eine Wassermenge bedeutet, ergiebt er sich unmittelbar.

Fig. 17.



Man kann auch sagen: Die Ausflußgeschwindigkeit ist gleich der Fallgeschwindigkeit, welche der Fallhöhe h beim freien Falle entspricht; oder: Die Geschwindigkeitshöhe des ausfließenden Wassers ist gleich der Druckhöhe auf die Mündung, wenn diese geschlossen ist.

86. Ein Wasserstrahl erlangt nicht ganz die oben angegebene Geschwindigkeit, weil ein gewisser (unter gewöhnlichen Umständen aber nur geringfügiger) Bruchteil der geleisteten Arbeit zur Überwindung der inneren Reibungen in der Wassermasse verbraucht wird. Man setzt daher

$$v = c \cdot \sqrt{2gh},$$

wo c eine für Wasser durch Versuche gleich etwa 0,97 bestimmte Zahl bedeutet, welche der Geschwindigkeitscoeffizient genannt wird. Für vollkommene Flüssigkeiten wäre $c = 1$; er ist um so kleiner, je zäher eine Flüssigkeit ist.

87. Das Volumen des in der Sekunde ausfließenden Wassers γ ergiebt sich nach § 81

$$V = f'v = f' \cdot c\sqrt{2gh},$$

wenn f' die Querschnittsfläche des austretenden Strahles bedeutet.

Bei einem Ausflusse aus dünner Wand ist aber f' nicht gleich dem Querschnitte f der Öffnung zu setzen. Wegen der Trägheit des ausfließenden Wassers ziehen sich vielmehr die Stromfäden auch nach dem Austritte aus dem Gefäße noch etwas zusammen. Damit steht im Zusammenhange, daß auch die oben berechnete Geschwindigkeit v sich nicht auf den Ausflußquerschnitt, sondern auf

den engsten Querschnitt des Strahles bezieht, welcher in einiger Entfernung von der Öffnung liegt. Man setzt

$$f' = c'f,$$

worin c' eine durch Versuche zu ermittelnde Zahl ist, welche der Kontraktionscoeffizient genannt wird. Für einen Ausfluß aus dünner Wand kann man ungefähr $c_1 = 0{,}64$ setzen. Indessen ändert sich c_1 sowohl mit der Form als mit dem Flächeninhalte der Öffnung. Durch Ansatzröhren kann c_1 gleich 1 gemacht werden. Durch eine sich nach außen konisch erweiternde Ansatzröhre kann man den Querschnitt des austretenden Strahles sogar größer machen, als den Querschnitt der Wandöffnung. In diesem Falle hat sich aber die Geschwindigkeit in der Ansatzröhre gegen das Ende derselben vermindert.

Für das sekundliche Wasservolumen erhält man nun

$$V = cc'f\sqrt{2gh}.$$

Für das Produkt cc' läßt sich ein einziger Coeffizient K setzen, welcher der Ausflußcoeffizient heißt. Man schreibt also

$$V = Kf\sqrt{2gh}.$$

Der Ausflußcoeffizient schwankt zwischen etwa 0,62 (Ausfluß aus dünner Wand) und 0,97 (Ausfluß aus Ansatzröhren, welche sich der Gestalt der Stromlinien anschließen). Unter f ist in jedem Falle der kleinste Querschnitt des Rohres oder der Öffnung zu verstehen.

Aufg. 53. Das Mundstück einer Feuerspritze hat 3 cm lichten Durchmesser; wieviel cbm Wasser werden in der Stunde geworfen, wenn der Überdruck im Windkessel 5 Atm. beträgt, wovon aber 0,5 Atm. auf die Überwindung von Reibungswiderständen in der Rohrleitung zu rechnen sind, während der Ausflußcoeffizient gleich 0,9 gesetzt werden kann?

Aufg. 54. Um die Wassermenge zu messen, welche ein zum Betriebe einer Turbinenanlage verwendeter Wasserlauf in der Sekunde liefert, hat man eine Schütze des Wehres etwas in die Höhe gezogen, so daß ein Durchflußquerschnitt von 1,2 m Breite und 0,2 m Höhe entsteht. Der Oberwasserspiegel bleibt nach Verlauf einiger Zeit auf der Höhe von 1,3 m über der Mitte der Durchflußöffnung stehen. Wieviel Wasser führt der Bach und wieviel Pferdekräfte lassen sich

ihm entnehmen, wenn $K = 0{,}62$, das verfügbare Gefälle gleich 1,5 m und der Nutzeffekt der Turbine = 0,8 ist?

Aufg. 55. In einem unter hohem Drucke stehenden Gefäße befinden sich zwei Flüssigkeiten von verschiedenem spezifischen Gewichte über einander. Wie verhalten sich a) die Ausflußvolumina, b) die Ausflußgewichte, wenn man entweder die leichtere oder die schwerere Flüssigkeit durch gleiche Mündungen ausströmen läßt?

88. Für die Berechnung der Geschwindigkeit und der Wassermenge bei einem Überlaufe (z. B. bei einem Überlaufwehre) kann man die früheren Formeln ebenfalls verwenden, wenn man an Stelle von h den Höhenunterschied zwischen einem in einiger Entfernung (wegen der in der Nähe des Überlaufs eintretenden Spiegelsenkungen) liegenden Punkte des Oberwasserspiegels und der Mitte des Strahles versteht. Auf große Genauigkeit kann eine solche Berechnung aber keinen Anspruch machen.

Eine besondere Besprechung erfordert noch der Fall, daß der Ausfluß unter Wasser geschieht. Die Druckhöhe sei im Gefäße h, außerhalb in der Nähe der Mündung h_0, der den Ausfluß veranlassende Druckhöhenunterschied also $h - h_0$. Man ist dann nicht unmittelbar berechtigt, v nach der früheren Formel zu berechnen, indem man einfach $h - h_0$ an die Stelle von h setzt. Es zeigt sich dies deutlich, wenn man die Fortsetzung der Stromfäden in die äußere Wassermasse hinein betrachtet. Von der Ausflußstelle an erweitert sich ihr Querschnitt, die Geschwindigkeit nimmt schnell ab und damit der Druck zu (§ 83). Die Druckhöhe erniedrigt sich also unmittelbar an der Ausflußstelle unter den Wert h_0, welchen sie vor Beginn des Ausflusses hatte und der wirksame Druckhöhenunterschied wächst über $h - h_0$ hinaus.

Indessen kann man als Näherungswert auch hier

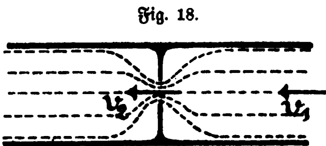
$$v = K\sqrt{2g(h - h_0)}$$

setzen, wenn man sich nur gegenwärtig hält, daß K hier im allgemeinen etwas größer als beim Ausflusse in die Luft ist und in jedem Falle der Anwendung K aus Versuchen, die unter gleichartigen Verhältnissen angestellt wurden, entnimmt.

89. Hierher gehört auch die Bewegung des Wassers durch eine schmale Öffnung innerhalb einer Rohrleitung (Fig. 18).

Die Verengung des Querschnittes bringt einen Druckhöhenverlust hervor. Es wäre aber nicht richtig, denselben gleich $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$ zu setzen, wenn v_2 die Geschwindigkeit in der Öffnung und v_1 diejenige im weiteren Rohre bedeutet.

Fig. 18.



Die Druckhöhe sinkt allerdings in der Öffnung selbst um dieses Maß, nachher steigt sie aber wieder (§ 83). Man kann sagen, daß sich ein Teil der Druckhöhe im vorderen Rohrteile in eine Geschwindigkeitshöhe verwandelt, die später im hinteren Rohrteile wieder in eine Druckhöhe umgewandelt wird. Bei einer vollkommenen Flüssigkeit würde infolge dessen gar kein Druckhöhenverlust durch die Querschnittsverengung entstehen. Dieser kommt vielmehr nur dadurch zustande, daß ein Teil der bei jenen Umwandlungen geleisteten Arbeiten für die Überwindung der Reibungen zwischen den einzelnen Stromfäden verbraucht wird. Er ist jenen Arbeiten selbst proportional und kann daher gleich

$$\eta \frac{v_1^2}{2g}$$

gesetzt werden, worin der Coeffizient η (der Widerstandscoeffizient) von der Gestalt und dem Verhältnisse der Durchflußöffnungen abhängig ist und durch Versuche ermittelt werden muß.

Aufg. 56. Wie läßt sich η im Geschwindigkeitscoeffizienten c und dem Verhältnisse der Querschnittsfläche ausdrücken, wenn angenommen wird, daß der zur Überwindung der Reibungen aufgewendete Bruchteil der geleisteten Arbeit ebenso groß ist, wie beim Ausflusse in die Luft? (§ 86.)

90. Pitot'sche Röhre. Eine vertikal stehende, oben offene Röhre sei an ihrem unteren ins Wasser tauchenden Ende horizontal umgebogen und in eine feine Mündung ausgezogen. Wenn das Wasser in Ruhe ist, steht der Flüssigkeitsspiegel im Rohre so hoch als außerhalb desselben. Bewegt sich dagegen das Wasser auf die Mündung zu, so steigt das Wasser im Rohre und zwar etwa so lange, bis die entstandene Überdruckhöhe das Wasser aus der Mündung mit einer Geschwindigkeit auszutreiben sucht, die der Stromgeschwindigkeit gleich und entgegengesetzt gerichtet ist.

Das Umgekehrte findet statt, wenn man das Rohr in die entgegengesetzte Lage bringt.

Diese Pitot'sche Röhre kann daher zum Messen der Stromgeschwindigkeit in einem Flußlaufe verwendet werden. Man ordnet hierzu am besten neben der oben beschriebenen eine zweite nicht umgebogene Röhre an, deren Mündung sich nach abwärts kehrt. Der Unterschied im Wasserstande beider giebt die Geschwindigkeitshöhe $\mathfrak{H}$ (§ 83) des strömenden Wassers an. Mit Rücksicht auf den Einfluß der nicht genau zu verfolgenden Strömungserscheinungen muß dieser Wert indessen noch mit einem für das betreffende Instrument durch Versuche zu ermittelnden Coeffizienten (der kleiner ist als 1) multipliziert werden.

Anm. Zum Messen der Stromgeschwindigkeit in einem Flußlaufe verwendet man außerdem Schwimmer oder den Woltmann'schen Flügel. Die Besprechung derselben gehört aber mehr in die Lehre vom Wasserbau als in die Mechanik.

Aufg. 57. Wie groß ist die Stromgeschwindigkeit, wenn sich an der Pitot'schen Röhre eine Ablesung von 122,5 mm ergiebt und der Coeffizient des Instrumentes = 0,84 ist?

91. Stoß des Wassers. Wenn ein Wasserstrahl auf eine ebene Wandfläche auftrifft, übt er gegen diese einen gewissen Druck aus. Man spricht in diesem Falle von dem Stoße des Wassers gegen die Wand, obschon sich der Vorgang in den wesentlichsten Punkten von dem Stoße fester Körper unterscheidet. Nur in manchen Fällen, wie beim hydraulischen Widder, kann der Stoß des Wassers mit dem Stoße fester Körper verglichen werden.

Es sei jetzt angenommen, daß sich nach einiger Zeit ein stetiger Zustand herausgebildet hat, d. h. ein solcher, bei welchem die Stromlinien ihre Lagen nicht mehr verändern. Die Wassermasse wird sich nach Art der Fig. 19a nach den Seiten hin ausbreiten; an der dem Strahle gegenüber liegenden Stelle der Wand hat sich eine im wesentlichen in Ruhe befindliche Wassermenge angestaut, um welche sich die Stromlinien herumziehen. Von einem eigentlichen Stoße kann hier gar nicht die Rede sein, da plötzliche Geschwindigkeitsänderungen überhaupt nicht vorkommen.

Der Druck P auf die Wand ist die Resultierende aller Centrifugalkräfte, welche von den Wasserteilchen ausgehen, die

die gekrümmten Teile der Stromfäden durchlaufen. In Fig. 19a sind diese Centrifugalkräfte durch Pfeile angedeutet und in Fig. 19b sind sie zu einem Kräftepolygon vereinigt.

Fig. 19a.

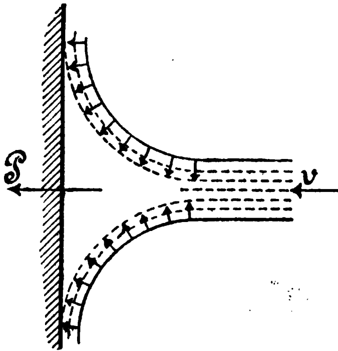
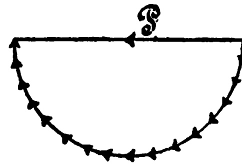


Fig. 19b.



Eingehend läßt sich die ganze Aufgabe nur mit höheren mathematischen Hilfsmitteln behandeln. Die nachfolgende elementare Ableitung der Kraft P giebt indessen ebenfalls eine richtige Lösung der Aufgabe, obschon sie nicht nach allen Richtungen hin einwandfrei ist.

92. Wenn angenommen werden darf, daß für den Krümmungshalbmesser der Stromlinien überall ein gewisser mittlerer Wert r gesetzt werden kann und daß auch die Geschwindigkeit v an allen Stellen nahezu gleich groß ist (d. h. daß die Stromlinien parallel zu einander verlaufen), so erhält man für die von irgend einem Wasserteilchen herrührende Centrifugalkraft (§ 5)

$$C = \frac{Q}{g} \cdot \frac{v^2}{r} \quad \text{und} \quad \sum C = \frac{v^2}{gr} \cdot \sum Q.$$

Das Kräftepolygon wird unter diesen Voraussetzungen ein Halbkreis; daher ist

$$P = \frac{2}{\pi} \cdot \sum C = \frac{2v^2}{gr\pi} \cdot \sum Q,$$

ΣQ ist hierbei das Gewicht des ganzen im gebogenen Teile der Stromfäden befindlichen Wassers und daher, wenn man den Querschnitt des Strahles mit f bezeichnet,

$$\sum Q = \tfrac{1}{2}\pi r f \cdot \gamma.$$

Man erhält also für P

$$P = \frac{v^2 f}{g} \cdot \gamma .$$

Der Krümmungsradius r ist also ganz ohne Einfluß auf die Größe der Resultierenden P. Führt man für v die Geschwindigkeitshöhe $\mathfrak{H}$ ein, so wird

$$P = 2f \cdot \mathfrak{H} \cdot \gamma ,$$

d. h. der Stoßdruck auf eine ebene Wand ist doppelt so groß, als der Druck auf den Deckel der Mündung, aus welcher der Strahl austritt, wenn die Mündung geschlossen wird.

Einen Strahl von kreisförmigem Querschnitte denke man sich durch eine große Zahl von Meridian-Ebenen in einzelne Sektoren zerschnitten. Es bleibt dann die vorstehende Betrachtung für jeden Sektor und darum auch für den ganzen Strahl anwendbar.

Die Ableitung zeigt, daß P kleiner wird, wenn die Wand gekrümmt und nach dem Strahle zu erhaben (konvex) ist, während der Stoßdruck auf eine hohle Fläche größer ist als der oben berechnete Wert. Selbstverständlich nimmt P auch ab, wenn die Ausdehnung der ebenen Wand nicht groß genug ist, um alle Stromfäden in die Richtung parallel zur Wand zu drängen.

Zusatz. Die Resultierende aller Wandkräfte an dem Gefäße, aus welchem der Strahl austritt (die **Reaktion** des ausfließenden Wassers) ist ebenfalls

$$P = 2f \cdot \mathfrak{H} \cdot \gamma .$$

Anl. z. Bew. Man denke sich das Gefäß mit der Wand (Fig. 19a) starr verbunden und betrachte einen beliebigen Stromfaden. Durch jeden Querschnitt desselben fließt während eines kleinen Zeitteilchens dieselbe Wassermenge, welche für den Augenblick kurz mit m bezeichnet werden mag. Die Geschwindigkeitsänderung, welche jedes m während der betrachteten Zeit erfährt, hängt von der Resultierenden aller an diesem m wirkenden Kräfte ab. Der Endzustand unterscheidet sich aber von dem Zustande zu Anfang der Zeit nur dadurch, daß ein Wasserteilchen m, das sich im oberen Teile des Gefäßes nach abwärts (also parallel zur Wand) bewegte,

ersetzt ist durch ein anderes, das längs der Wand hinströmt. Wenn alle an dem Stromfaden wirkenden Kräfte auf ein einzelnes Wasserteilchen *m* wirkten, müßte dieselbe Geschwindigkeitsänderung während des Zeitteilchens zustande kommen. Daraus folgt, daß die Resultierende aller am Stromfaden wirkenden Kräfte parallel zur Ebene der Wand geht. Da dies für jeden Stromfaden gilt, gilt es auch von der ganzen Wassermasse und daher von der Resultierenden sämtlicher Wandkräfte und aller Schwerkräfte.

Unter der Voraussetzung, daß die Wand senkrecht (parallel zur Richtung der Schwere) steht, kann daher auf das aus dem Gefäße und der Wand bestehende starre System keine Kraft parallel zum Strahle von sämtlichen Wandkräften ausgeübt werden. Der resultierende Druck auf das Gefäß in der Richtung des Strahles muß daher gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sein dem resultierenden Drucke auf die Wand.

Anm. Auf den ersten Blick scheint es, als wenn die Reaktion des ausströmenden Wassers nur die Hälfte des angegebenen Wertes annehmen könnte. Verschließt man nämlich die Mündung, so ist die Projektion der Resultierenden aller Wandkräfte auf die horizontale Ausflußrichtung gleich Null, ohne den Druck auf den Mündungsdeckel also gleich und entgegengesetzt diesem letzteren. Wenn der Strahl ausfließt, fällt aber nicht nur der Druck auf den Mündungsdeckel fort, sondern zugleich findet in dem ganzen Gefäße eine Änderung der Druckverteilung statt, wodurch die Beschleunigung längs der Stromlinien zustande kommt. Infolge dessen erlangt die Reaktion die oben berechnete Größe, welche das Doppelte vom Drucke auf den Mündungsdeckel bei geschlossener Mündung beträgt.

93. Die Formel für den Wanddruck bleibt auch dann noch giltig, wenn die Wand selbst sich entweder in der Richtung des Strahles oder in der entgegengesetzten Richtung bewegt, da es nur auf die Relativbewegung beider Körper zu einander ankommt. Unter v ist in den vorhergehenden Formeln in diesem Falle die relative Geschwindigkeit zu verstehen.

94. Schiefer Stoß. Auch der Fall, daß die Richtung des Strahles irgend einen Winkel α mit der Wandebene bildet, läßt sich leicht auf den früheren zurückführen.

Man denke sich nämlich in Fig. 19a der Wand eine Bewegung in ihrer eigenen Ebene erteilt. Soweit sich das Wasser

als eine vollkommene Flüssigkeit ansehen läßt, d. h. keine Reibung zu übertragen vermag, kann hierdurch an dem ganzen Verlaufe der Stromfäden, und daher an P nichts geändert werden. Die Relativbewegung zwischen der Wand und dem Strahle ist aber in diesem Falle dieselbe, als wenn die Wand ruhte und der Strahl sich in schiefer Richtung gegen dieselbe bewegte. Wir gelangen so zu dem Satze:

Der Normaldruck eines schief auftreffenden Wasserstrahles gegen eine ebene Wand ist

$$P = \frac{v^2 f}{g} \cdot \gamma,$$

wenn unter v die Normalkomponente der Geschwindigkeit, und unter f die Querschnittsfläche des Strahles parallel zur Wandfläche verstanden wird.

Da sich die Normalkomponente v durch Multiplikation und der Querschnitt parallel zur Wandfläche durch Division mit $\sin\alpha$ aus der absoluten Geschwindigkeit, bezw. dem Normalschnitte ergiebt, kann man dafür auch sagen

$$P = P' \sin\alpha,$$

wo P den Normaldruck auf die schiefe und P' denjenigen auf eine senkrecht zur Strahlrichtung stehende Wand bedeutet.

95. Stoß unbegrenzten Wassers. Während bisher angenommen war, daß die vom Wasserstrahle getroffene Wand eine viel größere Fläche als der Strahl besitzen sollte, behandeln wir jetzt den entgegengesetzten Fall. Die Stromlinien sind auch hier ihrem allgemeinen Verlaufe nach leicht anzugeben; eine genaue Berechnung des Stoßdruckes stößt aber auf noch größere Schwierigkeiten als im früheren Falle. Man sieht sich daher auf die Bestimmung desselben durch die Erfahrung angewiesen.

Auf der Vorderseite der ebenen Wandfläche entsteht ebenso wie auf der Hinterseite ein nahezu ruhendes Stauwasser, das an jener einen erhöhten, an dieser einen erniedrigten Druck aufweist gegenüber dem Drucke, der bei Fortnahme des Hindernisses an der betreffenden Stelle wirkte. Die im Sinne des Stromes auf die Wand ausgeübte Kraft ist gleich der Differenz dieser beiderseitigen Drucke.

Da der Vorgang im allgemeinen ähnlich verläuft, wie der im § 92 besprochene, können wir setzen

$$P = K \cdot \frac{v^2 f}{g} \cdot \gamma,$$

wo K ein aus Versuchen für kleine Flächen zu ungefähr 0,93 bestimmter Coeffizient ist. Für größere Flächen wächst er bis auf etwa 1,5 und hängt auch von der Gestalt der Fläche ab.

96. Für den **schiefen Stoß** erhält man in Anlehnung an § 94

$$P = K_1 \frac{v^2 f}{g} \cdot \gamma \cdot \sin^2 \alpha,$$

wenn v die Stromgeschwindigkeit, $v \sin \alpha$ also die Normalkomponente derselben, f die Wandfläche und K_1 einen Erfahrungscoeffizienten bedeutet. Da für $\sin \alpha = 1$ der schiefe Stoß in einen geraden übergeht, muß $K_1 = K$ sein.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß die Formeln auch dann anwendbar bleiben, wenn die getroffene Wandfläche selbst eine Bewegung ausführt. Unter v ist dann stets die relative Geschwindigkeit zwischen Wand und Strom zu verstehen.

Aufg. 58. Die Radschaufeln einer Schiffsmühle tauchen $0{,}5^m$ tief ein und sind $0{,}9^m$ breit; die Stromgeschwindigkeit beträgt $2{,}4^m$. Wieviel Pferdekräfte erhält man, wenn die Umfangsgeschwindigkeit a) 0,3, b) 0,4, c) 0,5, d) 0,6, e) 0,7 der Stromgeschwindigkeit beträgt? ($K = 1{,}2$.)

Aufg. 59. Wie heißt die Lösung der vorausgegangenen Aufgabe für ein unterschlägiges Mühlrad mit Gerinne und geraden Schaufeln, wenn die zur Verfügung stehende Wassermenge 800^l in der Sekunde und die Geschwindigkeitshöhe des Strahles $1{,}2^m$ beträgt? Wie groß ist in jedem Falle der erzielte Nutzeffekt? (Nach § 91 und 92 zu berechnen.)

Anm. Der Nutzeffekt eines unterschlägigen Mühlrades wird erheblich gesteigert (§ 92), wenn die Schaufeln gekrümmt sind, so daß sie dem auftreffenden Strahle ihre hohle Seite zukehren. Ein solches Rad, dessen Schaufeln aus Eisenblech hergestellt werden, heißt nach dem Erfinder ein Poncelet-Rad.

97. Der **Widerstand, welchen ein Schiff** erfährt, das mit der Geschwindigkeit v durch ruhendes Wasser fährt, kann

$$P = K \frac{v^2 f}{2g} \cdot \gamma$$

gesetzt werden, wobei indessen K von der Schiffsform abhängig ist

und sich innerhalb sehr weiter Grenzen (etwa von 0,1 bis 0,5) ändert.

Aufg. 60. Wieviel Pferdekräfte sind zur Bewegung eines Dampfers erforderlich, wenn $f = 40^{qm}$, $v = 8^{m}$, $K = 0,3$ ist, und der Wirkungsgrad der Schraube gleich 0,7 gesetzt werden kann?

98. Hydraulischer Widder. Hier findet ein Stoß der Wassersäule im eigentlichen Sinne des Wortes statt. Während das Wasser in einem Rohre mit einer Geschwindigkeit v dahinströmt, wird plötzlich ein Ventil geschlossen, welches ein Weiterströmen des Wassers verwehrt. Die lebendige Kraft der Wassersäule wird in Formänderungsarbeit verwandelt, die teils zur Zusammenpressung des Wassers, teils zur Ausdehnung der Gefäßwände verwendet wird. Der Druck steigt in viel höherem Grade als in den früher betrachteten Fällen und vermag einen beträchtlichen Widerstand zu überwinden.

Der Apparat ist seiner Wirkungsweise nach mit einer Ramme (§ 52) zu vergleichen; eine genaue Berechnung läßt er nicht zu.

Drittes Kapitel.

Das Wasser als unvollkommene Flüssigkeit.

99. An verschiedenen Stellen wurde bereits auf die durch die Zähigkeit bedingte Abweichung des Verhaltens des Wassers von demjenigen einer vollkommenen Flüssigkeit hingewiesen. Hier sollen noch einige dahin gehörige Erscheinungen näher besprochen werden, welche für die Anwendungen von Wichtigkeit sind.

Zunächst erkennt man leicht, daß das Wasser Zugspannungen in gewissem Grade aufzunehmen vermag. Ein Tropfen, der an einer nach abwärts gekehrten Fläche hängt, kann nur dadurch im Gleichgewichte bleiben, daß in jedem Horizontalschnitte durch denselben Zugspannungen auftreten, welche dem Gewichte des unteren Teiles die Wage halten.

Unter besonderen Umständen können die Zugspannungen, welche sich dem Zerreißen der Wassermasse widersetzen, sogar eine ganz beträchtliche Größe erlangen, welche durchaus mit der Zugfestig-

keit fester Körper verglichen werden kann. In der That fällt der Tropfen, wenn man ihn vergrößert, nicht etwa deshalb zum Teile herab, weil die Zugspannung auf dem ganzen Horizontalschnitte überwunden worden wäre; es bildet sich vielmehr vorher eine enge Einschnürung durch bloße Verschiebungen der Wasserteilchen gegeneinander. Die Größe der Zugspannungen, welche das Wasser übertragen kann, läßt sich daher nur unter solchen Umständen erkennen, bei denen Einschnürungen dieser Art oder eine allmähliche Trennung der Wassermasse durch gegenseitige Verschiebungen vermieden sind.

In der That ist auch das Nichtauftreten von Zugspannungen nicht wesentlich für den Begriff einer vollkommenen Flüssigkeit. Wir haben der letzteren diese Eigenschaft nur deshalb beigelegt, weil bei den wichtigsten hydraulischen Erscheinungen die Zugspannungen keine Rolle spielen und die vorhergehenden Betrachtungen dadurch vereinfacht wurden.

Anders ist es mit den in die Ebene der Schnittfläche fallenden Kräften. Scherkräfte in dem Sinne wie bei festen Körpern vermag auch eine unvollkommene Flüssigkeit durchaus nicht zu übertragen. Zwar treten tangentiale Kräfte auf, welche sich dem Hinwegschieben einer Flüssigkeitsschicht über eine andere widersetzen, aber nur so lange, als eine relative Bewegung beider Schichten stattfindet. Im Ruhezustande verschwinden alle tangentialen Kräfte. Man bezeichnet dieselben wegen des geschilderten Verhaltens als innere Reibungen; sie befolgen indessen ganz andere Gesetze als die Reibungen zwischen festen Körpern. (§ 103.)

100. Kapillarität. Während für eine vollkommene Flüssigkeit nach § 75, Zus., keine Arbeit bei einer Gestaltsänderung der Flüssigkeitsmasse verbraucht oder gewonnen wird, trifft dies für das Wasser nicht mehr genau zu. Zunächst müssen bei einer Formänderung die inneren Reibungen zwischen den einzelnen, sich gegeneinander verschiebenden Wasserteilchen überwunden werden. Die Größe der Arbeit, welche hierzu verbraucht wird, hängt ab von der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Änderung vollzieht. Sie läßt sich auf jedes beliebige kleine Maß herabdrücken, wenn man die Änderung langsam genug vor sich gehen läßt.

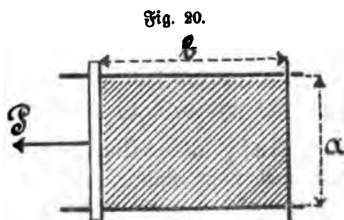
Außerdem ist aber jede Vergrößerung oder Verkleinerung der Oberfläche mit einer positiven oder negativen Arbeitsleistung verbunden, welche von der Geschwindigkeit der Änderung unabhängig ist. Eine Erklärung für diese Erscheinung findet man durch folgende Überlegung.

Die Wassermoleküle, welche sich im Inneren der Flüssigkeit befinden, werden durch alle benachbarten angezogen (darauf beruht der oben erwähnte Widerstand des Wassers gegen Zerreißen). Die in der Oberflächenschicht befindlichen erfahren solche Anziehungen ebenfalls, die aber wegen der nach beiden Seiten ungleichen Verteilung der Masse eine nach innen gerichtete Resultierende besitzen. Daraus folgt zunächst, daß der Flüssigkeitsdruck von außen nach innen steigt, und weiter, daß eine gewisse Arbeit geleistet werden muß, um weitere Moleküle in die Oberflächenschicht zu bringen.

Die Dicke der Oberflächenschicht, in welcher sich diese Erscheinungen bemerklich machen, hängt offenbar ab von der Entfernung, auf welche sich die Molekularanziehungen äußern. Man hat Grund zu der Annahme, daß ein Molekül einen Durchmesser von mehreren Zehnmilliontel mm besitzt; die Entfernung, auf welche die Molekularkräfte wirken, mag beträchtlich größer sein, sie übersteigt aber, der Erfahrung zufolge, sicher nicht ein Tausendstel mm.

101. Die Arbeit, welche erforderlich ist, um die an die Luft grenzende Oberfläche der Wassermasse um die Flächeneinheit (1^{qcm}) zu vergrößern, wird wieder gewonnen, wenn sich die Wassermasse wieder zusammenzieht. Sie ist in ähnlicher Weise aufgespeichert, wie die Arbeit, welche erforderlich ist, um eine Uhrfeder aufzuziehen; man nennt sie die Oberflächenenergie der Flüssigkeit. Die Dimension der Oberflächenenergie ist Arbeit : Fläche, d. h. Kraft : Länge.

Fig. 20.



In der Oberflächenschicht herrscht eine gewisse Zugspannung, die Oberflächenspannung. Man denke sich nämlich (Fig. 20) aus vier Stangen, von denen eine verschieblich ist, einen rechteckigen Rahmen gebildet, der von einem Flüssigkeitshäutchen (einer Seifenblase) gefüllt ist. Zur Vergrößerung der Haut muß (bei möglichst langsamer Bewegung) eine Kraft P angebracht werden,

welche der Rechteckseite a proportional ist. Verstehen wir unter s die auf die Längeneinheit von a kommende (spezifische) Oberflächenspannung, so ist $P = as$.

Lehrsatz. Die Oberflächenspannung für die Längeneinheit ist gleich der Oberflächenenergie für die Flächeneinheit.

Anl. z. Bew. In Fig. 20 möge sich die Rechteckseite b um x vergrößern. Die Arbeit von P ist dann gleich asx und die für die Neubildung der Flächeneinheit Oberfläche aufgewendete Arbeit daher gleich s.

102. Wenn drei Flüssigkeiten oder zwei Flüssigkeiten und ein fester Körper in einer Kante zusammenstoßen, müssen die drei Trennungsflächen solche Winkel mit einander bilden, daß sich an der Kante die drei Oberflächenspannungen im Gleichgewichte halten. Ist der eine Körper z. B. Glas, der zweite Wasser und der dritte Luft, so bildet sich ein nur von der Beschaffenheit (Reinheit) der Oberfläche abhängiger Randwinkel zwischen Glas und Wasser aus.

Wenn die eine der drei Oberflächenspannungen größer ist als die Summe der beiden anderen, kann ein Gleichgewicht in der bezeichneten Weise nicht zustande kommen. Ein Öltropfen auf einer Wasseroberfläche breitet sich aus diesem Grunde immer weiter aus, bis er die Wasseroberfläche ganz bedeckt oder (wenn diese sehr groß ist) bis die Schicht so dünn geworden ist, daß sie die Eigenschaften einer Flüssigkeit verloren hat.

Aus diesen Betrachtungen erklärt sich die Kapillarität oder Haarröhrchenanziehung. In einem engen Glasrohre bildet der Wasserspiegel eine hohle Fläche, die sich mit dem oben erwähnten Randwinkel an die Glaswand anlehnt. Die vertikalen Komponenten der Oberflächenspannungen am Rande der Fläche stehen im Gleichgewichte mit dem Gewichte der gehobenen Flüssigkeitssäule.

Aufg. 60. Um wieviel steigt das Wasser in einem Haarröhrchen vom Radius r, wenn die Oberflächenspannung s und der Randwinkel α gegeben sind?

Aufg. 61. Dasselbe für zwei parallele Glasplatten, deren Abstand gleich a ist.

Aufg. 62. Warum kann man die Haarröhrchenanziehung nicht

dazu verwenden, um z. B. das Wasser einer Wasserleitung in einen höher gelegenen Behälter zu schaffen?

103. Zähigkeit. In einer Wassermasse seien die Stromlinien alle parallel zu einander; die Geschwindigkeit in einer derselben sei v, und diejenige in einer anderen, welche den Abstand a von der ersten hat, sei v_1, während sich die Geschwindigkeit in den dazwischen liegenden Stromlinien proportional dem Abstande von jenen beiden ändern möge.

Jeder Stromfaden übt dann auf die angrenzenden eine innere Reibung aus, welche die langsamer gehenden beschleunigt und die schnelleren verzögert. Bezeichnet man die auf die Flächeneinheit kommende innere Reibung für eine Schnittfläche, welche senkrecht steht zum Abstande a mit F, so ist

$$F = \mu \frac{v_1 - v}{a},$$

worin μ eine von der Beschaffenheit der Flüssigkeit abhängige Größe ist, welche durch Versuche zu ermitteln ist und der Zähigkeitscoeffizient genannt wird.

104. Bewegung in sehr engen Röhren. Wenn der Durchmesser einer Röhre sehr klein ist gegen die Länge derselben, ist die Verteilung der Geschwindigkeiten über den Querschnitt an verschiedenen Stellen die gleiche. Am größten ist die Geschwindigkeit in der Rohrachse und sie nimmt bis auf Null an der Rohrwand ab. Man denke sich einen Cylinder von der Länge l, dessen Achse mit der Rohrachse zusammenfällt, aus der strömenden Wassermasse herausgeschnitten. Die treibende Kraft ist $(p_1 - p)f$, und sie muß gleich sein der am Umfange wirkenden Reibung.

Durch Anwendung der Differenzialrechnung findet man hieraus

$$v = \frac{p_1 - p}{l} \cdot \frac{R^2 - r^2}{4\mu},$$

wo v die Geschwindigkeit im Abstande r von der Achse, R den Radius des Rohres und μ den Zähigkeitscoeffizienten bedeutet. Die sekundliche Wassermenge Q ergiebt sich daraus

$$Q = \pi \frac{p_1 - p}{l} \cdot \frac{R^4}{8\mu}.$$

Die Formel spricht das Poiseuillesche Gesetz aus.

105. An Stelle der spezifischen Druckkräfte p und p_1 kann man auch die Druckhöhen h und h_1 einführen. Versteht man unter v_m die mittlere Geschwindigkeit, welche doppelt so groß ist, als die Geschwindigkeit in der Rohrachse, so wird

$$\gamma \cdot \frac{h_1 - h}{l} = v_m \cdot \frac{8\mu}{R^2},$$

oder: der Druckhöhenverlust für die Längeneinheit in einer engen Röhre ist proportional der mittleren Geschwindigkeit und umgekehrt proportional der Querschnittsfläche.

106. Bewegung in Wasserleitungsröhren. Hier ist man auf die Resultate von Versuchen angewiesen, die aber weit auseinander gehen. Die ganze Frage ist daher immer noch als eine offene anzusehen. Während man nach dem Vorhergehenden erwarten sollte, daß der Druckhöhenverlust proportional v_m und umgekehrt proportional der Querschnittsfläche gesetzt werden könnte, wird gewöhnlich

$$\frac{h_1 - h}{l} = \zeta \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{1}{2R}$$

gesetzt, wo ζ durch Versuche, z. B. von Zeuner

$$\zeta = 0{,}014312 + \frac{0{,}010327}{\sqrt{v}}$$

bestimmt wurde.

Nach Hagen ist

$$\frac{h_1 - h}{l} = a \frac{v^2}{2R} + b \frac{v}{4R^2},$$

wo $a = 0{,}0012$ und $b = 0{,}0000039$ für eine Temperatur des Wassers von 10° C. und in bezug auf das m als Längeneinheit gefunden wurde.

Die Temperatur ist deshalb von Einfluß, weil der Zähigkeitscoeffizient μ sich mit steigender Temperatur vermindert. Je wärmer das Wasser wird, desto mehr nähert es sich in seinem Verhalten einer vollkommenen Flüssigkeit.

Die erste Formel für den Druckhöhenverlust spricht aus, daß derselbe für eine Rohrlänge, die gleich dem Durchmesser ist, bei größeren Geschwindigkeiten etwa $1\frac{1}{2}$% der Geschwindigkeitshöhe,

bei kleineren Geschwindigkeiten etwas mehr, bei 1^m pro Sekunde etwa 2,4 % der Geschwindigkeitshöhe beträgt.

Die Hagen'sche Formel stimmt ihrem ersten Gliede nach mit jener überein. Bei größeren Geschwindigkeiten und weiten Röhren überwiegt das erste Glied beträchtlich das zweite und giebt einen Druckhöhenverlust unter den früheren Umständen von etwa 2,4 % der Geschwindigkeitshöhe. Das zweite Glied kommt bei engen Röhren und niedrigen Geschwindigkeiten in Betracht und entspricht der Poiseuille'schen Formel (§ 105).

Aufg. 63. Wie viel cbm Wasser vermag ein Rohr von $0{,}4^m$ lichtem Durchmesser und 3200^m Länge in der Stunde zu befördern, wenn der ganze Druckhöhenverlust a) 2^m, b) 10^m, c) 3 Atm. betragen soll? (Nach beiden Formeln zu berechnen!)

Aufg. 64. Leite die Formel ab für die sekundliche Wassermenge, wenn der Durchmesser, die Länge des Rohres und der zulässige Druckhöhenverlust gegeben sind.

Aufg. 65. Der Wasserverbrauch einer Stadt steige auf a) das 3fache, b) das n-fache. Wie groß muß der Durchmesser des Hauptzuleitungsrohres gewählt werden, wenn er früher $0{,}5^m$ betrug, und wenn der Druckhöhenverlust das frühere Maß nicht übersteigen darf?

107. Bewegung in Flüssen und Kanälen. Die Erscheinung ist der vorher besprochenen im allgemeinen ähnlich, dabei aber erheblich komplizierter. Man darf sich daher nicht wundern, daß die Ansichten hier noch mehr auseinander gehen, als im vorigen Falle; hier genügt es, unter den vielen Formeln, welche bisher aufgestellt wurden, einige der bekanntesten und einfachsten anzugeben.

An die Stelle des Druckhöhenverlustes tritt hier das (relative) Gefälle, d. h. der Höhenunterschied des Stromspiegels für eine gewisse Strecke, dividiert durch letztere. Von vornherein ist klar, daß bei stetiger Bewegung die mittlere Geschwindigkeit des Stromlaufes von der Größe des Gefälles abhängen muß. Denn die von der Schwere geleistete Arbeit, welche dem Gefälle proportional ist, wird gerade zur Überwindung der Reibungswiderstände verbraucht, und diese nehmen zu mit der Geschwindigkeit. Die Reibungswiderstände hängen aber außerdem ab von dem Verhältnisse der Querschnittsfläche zu dem benetzten Teile des Umfanges

(die Reibung an der Luft kommt nicht in Betracht gegen diejenige an den Wänden).

Bezeichnet man dieses Verhältnis mit r (für sehr breite Wasserläufe von rechteckigem Querschnitte ist r nahezu gleich der Tiefe) und das Gefäll mit s, so ist nach Eytelwein die mittlere Geschwindigkeit

$$v = k \cdot \sqrt{r \cdot s},$$

wo k für 1^m als Längeneinheit gleich 50,9 gesetzt werden kann. Besser schließt man sich indessen den Erfahrungen an, wenn man k mit v selbst veränderlich nimmt und zwar für

$$v = 0{,}1^m, \quad 0{,}5^m, \quad 1{,}0^m, \quad 2{,}0^m, \quad 3{,}0^m$$
$$k = 36{,}42, \quad 50{,}11, \quad 53{,}17, \quad 54{,}92, \quad 55{,}86,$$

oder nach einer anderen Angabe

$$k = 49{,}87 \sqrt[6]{v}.$$

Selbstverständlich hat auch die Beschaffenheit der Kanalwände (der Rauhigkeitsgrad) einen Einfluß auf die Geschwindigkeit. Um diesem Umstande Rechnung zu tragen, wird empfohlen, zu setzen

$k = 70{,}5 + 7{,}254 \sqrt{r}$ für sehr glatte Wände,

$k = 56{,}0 + 7{,}254 \sqrt{r}$ für glatte Wände (Bretter, glattes Mauerwerk),

$k = 36{,}27 + 7{,}254 \sqrt{r}$ für Erde oder rauhes Mauerwerk.

108. In vielen Fällen handelt es sich darum, der Querschnittsfläche (z. B. eines Entwässerungsgrabens) eine solche Gestalt zu geben, daß ein möglichst geringes Gefälle zur Erzielung der erforderlichen Geschwindigkeit genügt. Dazu gehört, daß r möglichst groß und daher bei gegebenem Flächeninhalte der benetzte Umfang möglichst klein ist.

Bei rechteckigem Querschnitte muß hierzu die Breite doppelt so groß sein als die Tiefe, weil das durch Verdoppelung nach oben hin entstehende Quadrat von allen Rechtecken gleichen Inhalts den kleinsten Umfang besitzt. Die günstigste Querschnittsform ist aber der Halbkreis, weil der ganze Kreis unter allen Figuren den kleinsten Umfang bei gegebenem Inhalte hat. Entwässerungskanäle in Städten gestaltet man deshalb eiförmig, so daß der unter ge-

wöhnlichen Umständen gefüllte untere Teil einen Halbkreis bildet, während der obere Teil nur bei heftigen Regengüssen in Anspruch genommen wird.

Aufg. 66. Ein gemauerter Kanal soll in der Sekunde 900^{l} abführen. Wie muß man den Querschnitt wählen, wenn die Tiefe gleich der Hälfte der Breite sein soll und das zur Verfügung stehende Gefälle $^1/_{3000}$ beträgt? ($k = 50$.)

Aufg. 67. Eine halbkreisförmige Entwässerungsrinne hat 50^{cm} Durchmesser. Wie groß muß das Gefälle sein, wenn die Geschwindigkeit mindestens 1^{m} pro Sekunde betragen muß, um das Absetzen von Sinkstoffen zu verhüten?

109. Bewegung durch Filter. Grundwasserstrom. Die Bewegung des Grundwassers oder diejenige durch ein Filter ist zu vergleichen mit der Bewegung durch ein sehr enges Rohr (§ 104). Man setzt daher, wenn für $\frac{h_1 - h}{l}$ wie in § 107 s geschrieben wird,

$$v = K \cdot s,$$

und ermittelt den Coeffizienten K durch Versuche. Es ist selbstverständlich, daß die Größe K von der Beschaffenheit des durchströmten Bodens abhängig ist und in verschiedenen Fällen sehr verschiedene Werte annehmen kann.

110. Strahlpumpen. Bei einer Wasserstrahlpumpe tritt aus einer mit Wasser unter hohem Druck gefüllten Leitung ein Strahl mit großer Geschwindigkeit in einen mit Unterwasser gefüllten Cylinder und erteilt der ganzen im Cylinder enthaltenen Wassermasse eine gewisse Geschwindigkeit in der Richtung der Cylinderachse. Entsprechend der erlangten Geschwindigkeitshöhe steigt das Wasser in einem sich an den Cylinder anschließenden Rohre und ergießt sich in ein höher stehendes Gefäß, während dem Cylinder aus dem tiefer liegenden Behälter fortdauernd neue Wassermassen zugeführt werden.

Hier tritt die innere Reibung als bewegende Kraft auf. Eine annähernde Berechnung des Erfolges, welcher sich mit der Pumpe erzielen läßt, kann durch die nachstehende einfache Betrachtung angestellt werden.

Es sei f der Strahlquerschnitt, f' der Cylinderquerschnitt. Wenn angenommen wird, daß gegen das Ende des Cylinders sich

die Geschwindigkeiten vollständig ausgeglichen haben und mit v und v_1 die Geschwindigkeiten in f und f' (am Ende des Cylinders) bezeichnet werden, ist

$$vf\gamma(v - v_1) = (v_1 f_1 \gamma - vf\gamma) v_1,$$

denn die Geschwindigkeitsänderungen $v - v_1$ und v_1 sind umgekehrt proportional den davon betroffenen Wassermassen, weil die verzögernde Kraft im ersten Falle die Reaktion der beschleunigenden Kraft im zweiten Falle ist. (Der Vorgang ist in Vergleich zu stellen mit der ersten Stoßperiode beim Stoße fester Körper.)

Aus der Gleichung folgt

$$v^2 f = v_1^2 f_1 \quad \text{oder} \quad f_1 = f \frac{v^2}{v_1^2}.$$

Setzt man noch $v = \sqrt{2gH}$ und $v_1 = \sqrt{2gh}$, wo also H und h die betreffenden Druckhöhen sind, und bezeichnet die verbrauchte Druckwassermenge mit Q, die Fördermenge mit Q_1, so daß also $Q + Q_1$ die den Cylinder durchströmende Wassermenge ist, so wird

$$Q' = Q\left(\sqrt{\frac{H}{h}} - 1\right),$$

oder, um die Verluste durch Reibung an den Rohrwänden, den unvollständigen Ausgleich der Geschwindigkeiten u. s. w. zu berücksichtigen,

$$Q' = k \cdot Q\left(\sqrt{\frac{H}{h}} - 1\right),$$

wo $k < 1$ ist und durch Versuche ermittelt werden kann.

Aufg. 68. Der Druck des Betriebswassers betrage 3 Atm. Wie viel l Wasser kann man 5^m hoch in der Sekunde heben, wenn $f = 3^{qcm}$ und $k = 0{,}7$ ist?

Aufg. 69. Wie groß ist der Nutzeffekt a) bei der vorigen Aufgabe; b) wie lautet die allgemeine Formel für den Nutzeffekt der Wasserstrahlpumpe?

Dritter Abschnitt.

Mechanik der flüssigen Körper. II. Energetik.

Erstes Kapitel.

Die Wärme.

111. Nach den Entdeckungen und Untersuchungen von R. Meyer (geb. 1814, gest. 1878), Joule (geb. 1818, gest. 1889) und v. Helmholtz (geb. 1821) besteht die Wärme in einer Bewegung der Moleküle der Körper; ihre Behandlung gehört daher in das Gebiet der Mechanik. In der That kann man auch die Mechanik der luftförmigen Körper nicht ohne Berücksichtigung der dabei auftretenden Wärmeerscheinungen durchführen.

Die allgemeinen Gesetze der Wärmelehre werden in der Experimentalphysik besprochen und sind hier als bekannt vorausgesetzt.

Zwei Körper haben gleiche Temperatur, wenn kein Wärmeübergang durch Leitung oder Strahlung zwischen ihnen stattfindet, sobald man sie in Berührung bringt oder sie sich so gegenüberstellt, daß sich zwischen ihnen nur wärmedurchlässige (diathermane) Körper (oder ein leerer Raum) befinden. Die Temperatur wird vermittels der Thermometer durch Beobachtung des Raumes gemessen, welchen die Thermometerflüssigkeit (Quecksilber, Weingeist, Luft) in einem gegebenen Falle einnimmt. In der Mechanik der Wärme dient als Einheit der Temperatur stets der Celsiusgrad (1° C.).

Eine Erhöhung der Temperatur ist nach der mechanischen Wärmelehre gleichbedeutend mit einer Erhöhung der lebendigen Kraft der Moleküle. Die Einheit einer Wärmemenge im mechanischen Maße ist daher 1^{mkgr}. Da sich eine Wärmemenge aber nicht unmittelbar in mkgr ausmessen läßt, hat man dafür noch eine andere Einheit gewählt, die Calorie (auch kurz Wärmeeinheit genannt).

Unter einer Calorie versteht man die Wärmemenge, welche

man 1 kgr Wasser zuführen muß, um die Temperatur desselben um 1° C. zu erhöhen. Ungefähr ist

$$1 \text{ Cal.} = 430^{\text{mkgr}}.$$

Außer dieser „großen" Calorie wird (bei der Anwendung des Centimeter-Gramm-Sekunde-Maßsystems) vielfach die „kleine" Calorie gebraucht, welche im Unterschiede zu jener mit cal. bezeichnet werden soll. Es ist

$$1 \text{ Cal.} = 1000 \text{ cal.}$$

Anm. Früher (und zuweilen auch heute noch) setzte man gewöhnlich 1 Cal. = 424 mkgr. Neuere Versuche zeigten aber, daß der Wert zu klein ist; wahrscheinlich ist auch 430 mkgr noch etwas zu klein. Für die Anwendungen genügt dieser Näherungswert aber stets.

112. Absoluter Nullpunkt. Nach dem Celsius'schen Thermometer werden die Temperaturen vom Gefrierpunkte des Wassers aus gezählt. Nach der mechanischen Wärmelehre muß aber ein absoluter Nullpunkt bestehen. Ein Körper hat die absolute Temperatur Null (er kann nicht weiter abgekühlt werden), wenn seine Moleküle gar keine Wärmebewegungen mehr ausführen. Es steht zwar nicht in unserer Macht, einen Körper in diesen Zustand zu versetzen und den absoluten Nullpunkt durch einen unmittelbaren Versuch festzustellen. Die Gesetze über das Verhalten der Gase machen aber wahrscheinlich, daß derselbe etwa 273° C. unter dem Gefrierpunkte des Wassers liegt.

Wir setzen daher

$$T = 273 + t$$

und nennen T die absolute Temperatur des Körpers, wenn t die am Celsius'schen Thermometer abgelesene Temperatur bedeutet. Da die Zahl 273 nicht genau feststeht, kann man auch

$$T = a + t$$

schreiben, wo a die etwa an die Stelle von 273 zu setzende Zahl bedeutet. Hier rechnen wir aber stets mit dem Werte $a = 273$.

113. Spezifische Wärme. Die Wärmemenge, welche man einem Körper zuführen muß, um seine Temperatur zu erhöhen, ist streng proportional der Masse des Körpers, ferner auch nahezu (mit unbedeutenden Abweichungen) proportional der Temperaturerhöhung, im übrigen aber für Körper verschiedener Art verschieden

groß und auch von den besonderen Umständen, unter welchen die Erwärmung vor sich geht, abhängig. Indessen ist die letzte Bemerkung nur für luftförmige Körper von Bedeutung.

Man kann dies ausdrücken durch die Gleichung

$$Q = c \cdot M (T - T_0) = cM (t - t_0),$$

wo Q die zugeführte Wärme, M die Masse des erwärmten Körpers und c die Wärmemenge angiebt, welche erforderlich ist, um die Masseneinheit um 1° C. zu erwärmen. Die Größe c wird die spezifische Wärme des Körpers genannt; sie hängt nur von der Körperart (bei Gasen auch von der Art der Erwärmung) ab und ist durch Versuche festgestellt. Für Wasser ist $c = 1$.

An Stelle der Masse M des erwärmten Körpers kann man auch das Gewicht desselben bei den technischen Anwendungen einsetzen.

114. Mischung. Zwei Körper von den Gewichten G_1 und G_2, den Temperaturen t_1 und t_2 und den spezifischen Wärmen c_1 und c_2 werden gemischt oder so mit einander in Berührung gebracht, daß sie durch Wärmeaustausch (ohne Abgabe oder Empfang von Wärme aus dritten Körpern) die gleiche Temperatur erlangen. Man soll die Mischungstemperatur t berechnen.

Man erhält t durch Auflösen der Gleichung

$$c_1 G_1 (t_1 - t) = c_2 G_2 (t - t_2).$$

Die linke Seite stellt nämlich unter der Voraussetzung $t_1 > t_2$ die von dem wärmeren Körper abgegebene, die rechte die dem kühleren mitgeteilte Wärmemenge dar. Beide müssen sich gleich sein, wenn weder von außen her ein Wärmeaustausch stattfand, noch Wärme (etwa durch chemische Verbindung) neu erzeugt wurde.

Allgemeiner läßt sich schreiben

$$\sum c_i G_i (t_i - t) = 0,$$

wenn beliebig viele Körper ihre Temperatur ausgleichen und die Summe über alle ausgedehnt wird.

Aufg. 70. Wie groß ist die Mischungstemperatur, wenn 80 kgr Wasser von 45° C. und 30 kgr Alkohol von 18° C. (spezifische Wärme = 0,7) gemengt werden?

Aufg. 71. Wie heißt die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn die Mischung in einem eisernen Gefäße von 40 kgr Gewicht und einer Anfangstemperatur von 20° C. erfolgt? (Spezifische Wärme des Eisens = 0,11).

Aufg. 72. In einem Calorimeter, dessen Wasserwert gleich 15 gr ist, befinden sich 150 gr Wasser von 15,8° C. Nachdem 80 gr einer Substanz, deren spezifische Wärme ermittelt werden soll, von 40° C. eingebracht wurden, stieg die Temperatur auf 18,7° C. Wie groß war die gesuchte spezifische Wärme?

Anm. Unter dem Wasserwerte eines Körpers versteht man diejenige Wassermenge, welche zu einer Temperaturerhöhung um 1° C. gleichviel Wärme bedarf als der Körper, also das Produkt $c \cdot G$ (s. oben).

Aufg. 73. Der Auflagerdruck eines Zapfens von 8 cm Durchmesser beträgt 600 kgr, der Reibungscoeffizient 0,07, die Tourenzahl 180. Wieviel Calorien Wärme werden durch die Reibung in der Stunde erzeugt?

Aufg. 74. Um wieviel erwärmt sich das Wasser eines Wasserfalls, der von 30 m Höhe herabstürzt, wenn die ganze von der Schwere geleistete Arbeit in Wärme verwandelt wird?

115. Latente Wärme. Nicht immer erhöht sich die Temperatur, wenn man einem Körper Wärme zuführt. So bleibt bei einem Gemische von Eis und Wasser das Thermometer bei Wärmezufuhr so lange auf 0° C. stehen, bis alles Eis geschmolzen ist. Die Erklärung hierfür liegt darin, daß eine gewisse Arbeit geleistet werden muß, um die Moleküle aus demjenigen Zusammenhange loszureißen, den sie im festen Aggregatzustande einnehmen. Zu dieser Arbeitsleistung wird ein ihr gleicher Aufwand von lebendiger Kraft der Moleküle, d. h. von Wärme verbraucht. Die kinetische Energie hat sich in potentielle Energie verwandelt. Bei einer Umkehrung des Vorganges, also beim Gefrieren des Wassers findet eine Rückverwandlung der potentiellen Energie in Wärme statt.

Man bezeichnet die Wärme, welche dem Körper zugeführt wird ohne seine Temperatur zu erhöhen, als latente oder gebundene Wärme, oder im vorliegenden Falle besser als Schmelzwärme.

Aufg. 75. Wieviel Wasser von 15° C. muß man zu 3 kgr Eis von 0° C. gießen, um Wasser von 2° C. zu erhalten? (Schmelzwärme des Eises 80 Calorien für 1 kgr.)

Aufg. 76. G_1 kgr Wasser von der absoluten Temperatur T_1 werden mit G_2 kgr Eis von der Temperatur T_2 gemengt. Welche

Temperatur T nimmt die Mischung an ($c_2 = 0{,}504$) und welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit $T = a$, $> a$ oder $< a$ ist?

116. Spezifische Wärme der Gase. Wenn das Gas sich während der Erwärmung ausdehnt, wird ebenfalls ein Teil der zugeführten Wärme zur Arbeitsleistung, nämlich zur Überwindung des äußeren Druckes verbraucht; dieser Teil kann daher zur Erhöhung der Temperatur nichts beitragen.

Die wahre spezifische Wärme eines Gases kann daher nur aus einem solchen Versuche bestimmt werden, bei dem sich das Gas in einem festen Gefäße befindet, das jede Volumenänderung unmöglich macht. Wir bezeichnen sie mit c_v, mit c_p dagegen die Wärmemenge, welche man 1^{kgr} des Gases zuführen muß, um die Temperatur um 1^0 C. zu erhöhen, während das Gas sich unter Überwindung eines unveränderlichen äußeren Druckes p frei auszudehnen vermag.

Nach dem oben Gesagten ist

$$c_p > c_v$$

und der Unterschied der beiden spezifischen Wärmen $c_p - c_v$ entspricht der bei der Ausdehnung geleisteten Arbeit. (Auf Grund dieser Überlegung ist zuerst von R. Meyer die Umrechnung einer Wärmemenge auf eine Arbeitsleistung durchgeführt worden.)

Für atmosphärische Luft ist $c_p = 0{,}237$ und das gewöhnlich mit n bezeichnete Verhältnis $\frac{c_p}{c_v} = 1{,}41$, die wahre spezifische Wärme daher $c_v = 0{,}168$.

Aufg. 77. Ein mit Centralluftheizung versehenes Haus hat 6500^{cbm} nutzbaren Rauminhalt, für den einstündlicher Luftwechsel verlangt wird. Wieviel Calorien müssen in der Stunde von dem Ofen abgegeben werden, wenn die Außentemperatur -20^0 C. beträgt und wenn die erwärmte Luft (zum Ausgleiche für die Wärmeverluste) mit einer Temperatur von $+35^0$ C. den Wohnräumen zugeführt werden muß?

117. Verbindungswärme. Bei Herstellung einer chemischen Umlagerung wird ebenfalls Arbeit entweder verbraucht oder durch dieselbe gewonnen und der Wärmebewegung entzogen bezw. zugeführt. Aus diesem Grunde erhitzt sich z. B. die Schwefelsäure, wenn man sie mit Wasser verdünnt.

Besonders wichtig ist die Wärmeentwickelung bei der Verbrennung. Bei Verbrennung von 1 kgr Steinkohle werden 5600 bis 8000 Calorien erzeugt. Im Durchschnitte kann man rechnen, daß eine größere, gut eingerichtete Feuerung für 1 kgr gute Steinkohle 4800 Calorien nutzbar macht (die übrige Wärme entweicht durch den Schornstein u. s. w.).

Aufg. 78. Wieviel Steinkohlen verbraucht man für die in Aufg. 77 erwähnte Heizung?

118. Erster Hauptsatz der mechanischen Wärmelehre. (Prinzip der Erhaltung der Energie.) Dieser Satz, welcher die bedeutendste Errungenschaft der wissenschaftlichen Arbeit unseres Jahrhunderts bildet, hängt aufs engste zusammen mit der früher unablässig, aber stets vergeblich in Angriff genommenen Aufgabe, ein Perpetuum mobile zu konstruieren. Die Fruchtlosigkeit dieser Versuche führte allmählich zur Überzeugung von der Unmöglichkeit, Arbeit ohne entsprechenden Aufwand und Verbrauch anderer gleichwertiger Dinge zu gewinnen.

Man gelangte so zu dem Begriffe der Energie, unter der man alles versteht, was in Arbeit umgewandelt werden kann. Wir kennen zwei Hauptformen der Energie: die kinetische oder Energie der Bewegung und die potentielle oder Energie der Lage. Zur kinetischen Energie zählt die lebendige Kraft und die Wärme (d. h. die fühlbare oder am Thermometer nachweisbare Wärme des Körpers); zur potentiellen Energie zählt z. B. die in einer aufgezogenen Feder angesammelte Arbeit, die Arbeitsfähigkeit eines in die Höhe gehobenen Gewichtes, die durch das gleichzeitige Vorhandensein zweier Magnete in geringer Entfernung oder zweier elektrisierter Körper bedingte Arbeitsfähigkeit, ferner die Schmelzwärme, die chemische Wärme. Die Energie der Lage in einem Systeme hängt immer ausschließlich von der gegenseitigen Anordnung der einzelnen Bestandteile, die Energie der Bewegung von den Bewegungen jedes einzelnen Bestandteiles für sich ab.

Der erste Hauptsatz sagt aus:

Die Energie ist unvergänglich wie die Materie; sie kann weder neu erzeugt noch vernichtet werden; sie ist an den Stoff gebunden, kann aber von einem Körper auf

den andern übertragen werden und aus einer ihrer Formen in eine andere übergehen.

Der erste Hauptsatz beansprucht nicht nur eine angenäherte, sondern strengste Giltigkeit. Er würde hinfällig werden, wenn in einem einzigen Falle nachgewiesen werden könnte, daß er nicht genau zutrifft.

Der Satz stellt eine Erfahrungsthatsache dar, die nicht auf mathematischem Wege bewiesen werden kann. Der Umstand, daß er in allen vielgestaltigen Naturvorgängen, die bisher untersucht wurden, bestätigt gefunden wurde ohne jede Ausnahme oder Abweichung, bürgt uns für seine Richtigkeit.

119. Wärmeleitung. Die Flächen, welche Punkte gleicher Temperatur in einem Leiter mit einander verbinden, heißen Isothermen. In einer Schicht des Körpers mögen die Isothermen parallel zu einander gehen und der Temperaturabfall proportional der Entfernung der Isothermen sein. Die Wärmemenge Q, welche durch jeden Querschnitt f während der Zeit t durch Leitung übertragen wird, ist dann

$$Q = k \cdot f \frac{T_2 - T_1}{a} \cdot t,$$

wo a die Dicke der Schicht bedeutet, für welche die Endtemperaturen T_2 und T_1 sind. Der Coeffizient k heißt die Wärmeleitungsfähigkeit des Körpers und ist aus Versuchen bekannt. Er giebt die Zahl der Wärmeeinheiten an, welche durch einen Würfel von der Längeneinheit als Seite hindurchgehen, wenn der Temperaturunterschied zwischen zwei gegenüber liegenden Flächen 1° C. beträgt.

Aufg. 79. Durch jeden Quadratmeter Heizfläche einer gewöhnlichen Kesselfeuerung gehen in der Stunde etwa 12 000 Calorien. Wie groß ist der Temperaturabfall im Kesselbleche, wenn dieses 12^{mm} stark ist und k auf cm, sec und cal bezogen = 0,164 ist?

Aufg. 80. Wieviel Calorien gehen in der Stunde durch eine Fensterscheibe von $0{,}3^{qm}$ und $2{,}5^{mm}$ Stärke, wenn der Temperaturunterschied der beiden Flächen auf 5° C. erhalten wird und k für Glas = 0,002 cal ist?

120. Wärmestrahlung. Ein Körper, dessen Oberfläche wärmer ist als seine Umgebung, strahlt in jeder Sekunde eine Wärmemenge aus, welche dem Inhalte der Oberfläche und der Temperatur-

differenz proportional und im übrigen von der Beschaffenheit der Oberfläche abhängig ist. Man hat demnach

$$Q = K \cdot f \cdot (T_2 - T_1).$$

K nimmt den kleinsten Wert an für poliertes Silber und den größten für schwarze Oberflächen (Ruß).

Aufg. 81. Wieviel kleine Calorien strahlt ein Kupferdraht von 12^{m} Länge und 2^{mm} Stärke in der Sekunde aus, wenn K bei gewöhnlicher Oberflächenbeschaffenheit $= {}^1/_{4000}$ bezogen auf cm gesetzt werden kann und wenn er um 30° C. wärmer ist als die Umgebung?

Aufg. 82. Wieviel qm Oberfläche muß ein Ofen haben, wenn er bei 100° C. Temperaturunterschied in der Stunde 3000 Calorien ausstrahlen soll? ($K = {}^1/_{2000}$ cal für cm und sec.)

Zweites Kapitel.

Mechanik der Gase.

121. Die allgemeinen Sätze über das Gleichgewicht der Flüssigkeiten gelten für die luftförmigen ebenso wie für die tropfbar flüssigen Körper. Während indessen diese infolge von Druck oder von Wärmezufuhr oder -Abfuhr ihr Volumen nur wenig ändern, so daß auf die Veränderlichkeit des spezifischen Gewichtes bei den meisten Erscheinungen gar keine Rücksicht genommen zu werden braucht, zeigen die Gase das entgegengesetzte Verhalten. Überall tritt hier der Einfluß der Abhängigkeit des spezifischen Gewichtes von Druck und Temperatur in den Vordergrund. Jener Zusammenhang muß daher zuerst besprochen werden.

An Stelle des spezifischen Gewichtes gebraucht man in der Lehre von den Gasen häufig das spezifische Volumen V. Man versteht darunter das von 1^{kgr} des Gases eingenommene Volumen im cbm. Definiert man ferner als spezifisches Gewicht eines Gases das Gewicht in kgr von 1^{cbm} Gas und bezeichnet es mit γ, so ist

$$V = \frac{1}{\gamma} \quad \text{oder} \quad V \cdot \gamma = 1.$$

122. Zustandsgleichung der Gase. Zwischen dem spezifischen Volumen V, dem Drucke p, welcher in kgr pro qm ausgedrückt sein soll und der Temperatur t bezw. T besteht die Gleichung

$$pV = R(a + t) = RT,$$

in welcher R eine nur von der chemischen Beschaffenheit des Gases abhängige Konstante ist, welche für atmosphärische Luft $= 29{,}27$ zu setzen ist.

Die Formel heißt die Zustandsgleichung und ist aus der Erfahrung hervorgegangen. Sie kann als eine vereinfachte Ausdrucksform der Gesetze von Boyle (geb. 1627, gest. 1691) und Gay-Lussac (geb. 1778, gest. 1850) angesehen werden. (Das Gesetz von Boyle wird ungerechterweise häufig nach Mariotte, gest. 1684 benannt.)

Die Zustandsgleichung gilt indessen nicht in aller Strenge; es treten vielmehr Abweichungen von derselben ein, welche nur sehr geringfügig sind für Gase, welche sich weit vom Verflüssigungspunkte befinden, während sie in der Nähe des letzteren sehr hervortreten. Man bezeichnet ein Gas, für welches die Zustandsgleichung in aller Strenge gilt, als ein vollkommenes oder ideales Gas. Im folgenden wird gewöhnlich ein solches vorausgesetzt.

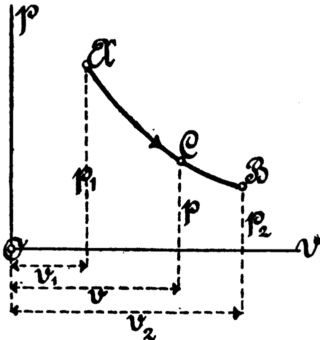
Aus der Zustandsgleichung erkennt man, daß von den drei Größen p, V, T zwei beliebige willkürlich gegeben werden können, während die dritte von diesen abhängt. Man sagt, daß durch diese Größen der innere Zustand des Gases oder auch der Wärmezustand desselben bedingt wird. Unter dem im Gegensatze hierzu stehenden äußeren Zustande versteht man den Bewegungszustand.

123. Zustandsänderung. Ein Gas, das wir uns der Einfachheit halber in Ruhe denken wollen, gehe aus einem Zustande 1 allmählich in einen Zustand 2 über. Zur Feststellung des jeweiligen Zustandes mögen die Größen p und V benützt werden.

Es ist nun von Wichtigkeit, zu erkennen, daß das Gas auf sehr verschiedene Art aus dem Zustande $p_1 V_1$ in den Zustand $p_2 V_2$ übergeführt werden kann. So kann man zuerst p_1 in p_2 übergehen lassen, während V sich nicht ändert, und hierauf kann man ohne Änderung des Druckes das Volumen auf V_2 bringen, oder man kann in umgekehrter Reihenfolge verfahren.

Man erlangt den besten Überblick über die Art der Zustandsänderung durch Verzeichnen eines Diagramms (Fig. 21). Auf der Linie OV trage man V in einem geeigneten Maßstabe ab und auf dem Höhenperpendikel p. Man erhält so eine Linie, deren Anfangspunkt A den Zustand $p_1 V_1$ und deren Endpunkt B den Zustand $p_2 V_2$ darstellt. Jeder dazwischen liegende Punkt C entspricht einem Zustande, in welchem sich das Gas während des Überganges einmal befunden hat.

Fig. 21.



Die Linie AB wird die Zustandskurve oder Zustandslinie genannt. Wenn sie im Sinne des Pfeiles, d. h. von A nach B beschrieben wird, entspricht sie einer Ausdehnung des Gases.

Die Temperatur des Gases während der Zustandsänderung ist aus der Zustandslinie nicht ohne weiteres ersichtlich. Mit Hilfe der Zustandsgleichung kann sie aber nachträglich für jeden beliebigen Übergangszustand leicht berechnet werden.

124. Das Gas leistet bei seiner Ausdehnung eine Arbeit, welche nach § 75 durch $\Sigma p \Delta V$ dargestellt wird. An die Stelle von ΔV tritt hier die Änderung des spezifischen Volumens, wenn man die Arbeitsleistung von 1 ^{kgr} des Gases bei jener Zustandsänderung betrachtet. Im Diagramme Fig. 21 wird jedes ΔV durch eine kleine Strecke auf der Linie OV und p durch die mittlere Höhe des über dieser Strecke bis zur Zustandslinie errichteten Trapezes dargestellt. Dem Produkte $p \Delta V$ entspricht also die Fläche dieses sehr schmalen Trapezes.

Wir gelangen so zu dem Satze:

Die bei der Zustandsänderung vom Gase geleistete Arbeit wird durch den Inhalt der Fläche angegeben, welche einerseits von der Zustandslinie, andererseits von der OV-Linie und den von den Endpunkten jener nach dieser gezogenen Perpendikeln eingeschlossen wird.

Der Maßstab, nach dem der Flächeninhalt auszumessen ist,

um die geleistete Arbeit zu finden, ergiebt sich aus den Maßstäben für die Darstellung von p und V durch einfache Multiplikation. Positiv ist die Arbeitsleistung, wenn der Pfeil der Zustandslinie nach rechts hin weist. Im anderen Falle muß von außen her Arbeit aufgewendet werden, um die Zustandsänderung herbeizuführen.

125. Besondere Arten der Zustandsänderung. Die drei einfachsten Arten der Zustandsänderung sind diejenigen, bei welchen eine der drei Größen, welche den Wärmezustand bestimmen, also entweder T, p oder V ungeändert bleibt. Man bezeichnet sie als isothermische, isodynamische und isometrische Zustandsänderungen oder als solche bei gleicher Temperatur bezw. bei gleichem Drucke oder gleichem Volumen.

Auf die erste dieser Zustandsänderungen bezieht sich das Boyle'sche Gesetz, auf die beiden anderen das von Gay-Lussac. Man gelangt zu diesen Gesetzen, wenn man die Zustandsgleichung für Anfangs- und Endzustand anschreibt und die Bedingung einführt, daß entweder $T_2 = T_1$ oder $p_2 = p_1$ oder $V_2 = V_1$ ist.

Aus

$$p_1 V_1 = R T_1, \quad p_2 V_2 = R T_2, \quad T_1 = T_2$$

folgt nämlich das Boyle'sche Gesetz

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \text{oder} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Bei gleicher Temperatur sind Druck und Volumen umgekehrt proportional zu einander.

Ebenso folgt aus

$$p_1 V_1 = R T_1, \quad p_2 V_2 = R T_2, \quad p_1 = p_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Bei gleichem Drucke ist das Volumen direkt proportional der absoluten Temperatur.

Und aus

$$p_1 V_1 = R T_1, \quad p_2 V_2 = R T_2, \quad V_1 = V_2$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Bei gleichem Volumen ist der Druck direkt proportional der absoluten Temperatur.

Aufg. 83. Zeichne die Zustandslinien a) für die isodynamische, b) für die isometrische, c) für die isothermische Zustandsänderung!

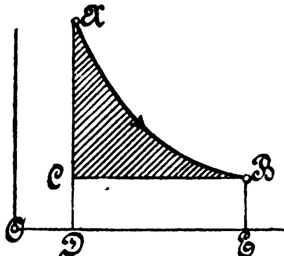
Anl. z. L. von c). Die isothermische Zustandslinie hat die Eigenschaft (s. oben), daß das Rechteck, welches von den beiden Perpendikeln eines ihrer Punkte auf die Linien Op und OV (Fig. 21) und diesen letzteren eingeschlossen wird, für alle Punkte dieselbe Fläche besitzt. Sie läßt sich demnach leicht konstruieren, wenn der Anfangspunkt gegeben ist; sie ist eine gleichseitige Hyperbel.

126. Adiabatische Zustandsänderung. Außer den drei einfachsten Zustandsänderungen ist noch jene von besonderem Interesse, welche stattfindet, ohne daß von außen her dem Gase Wärme zugeführt oder entzogen wird; sie wird die adiabatische Zustandsänderung genannt.

Bei der adiabatischen Ausdehnung findet notwendigerweise eine Abkühlung des Gases statt. Denn bei der Ausdehnung wird eine Arbeit vom Gase geleistet, die nach dem ersten Hauptsatze nur auf Kosten der Wärme des Gases zustande kommen kann. Daraus folgt, daß die adiabatische Linie überall steiler abfällt als die isothermische.

Man kann sich die adiabatische Zustandsänderung AB (Fig. 22) durch eine isometrische AC und eine darauf folgende isodynamische CB ersetzt denken. Für die drei Zustände in A, B und C gelten die Zustandsgleichungen

Fig. 22.



$$p_1 V_1 = R T_1$$
$$p_2 V_1 = R T_3$$
$$p_2 V_2 = R T_2 .$$

Die Abkühlung von T_1 (in A) auf T_3 (in C) erfordert für 1 kgr Gas die Entziehung von $c_v (T_1 - T_3)$ Wärmeeinheiten (§ 116), die Zustandsänderung CB die Zuführung von $c_p (T_2 - T_3)$ Wärmeeinheiten.

Setzt man beide Werte einander gleich und setzt für die Temperaturunterschiede ihre Werte aus den Zustandsgleichungen ein, so erhält man

$$\frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1} = \frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{p_2}{V_1} = n \frac{p_2}{V_1} .$$

Diese Gleichung gilt indessen nicht streng für die adiabatische Zustandsänderung, denn die bei dieser geleistete Arbeit ist um das in der Figur schraffierte Flächenstück größer, als die Arbeit bei der Zustandsänderung CB. Sie gilt aber um so genauer, je näher die Zustände A und B bei einander liegen. Wir können daher setzen

$$\frac{\Delta p}{\Delta V} = -n\frac{p}{V},$$

wenn die Änderungen $\Delta p = p_2 - p_1$ und ΔV sehr klein sind.

Mit Hilfe der höheren Rechnungsarten kann man daraus den Zusammenhang zwischen p und V während der adiabatischen Änderung ableiten. Man erhält auf diesem Wege

$$p_2 V_2^n = p_1 V_1^n.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der zwischen p und V bei der isothermischen Zustandsänderung bestehenden (dem Boyleschen Gesetze) nur dadurch, daß an Stelle des spezifischen Volumens die $n$te Potenz desselben tritt; n ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p und c_v und für atmosphärische Luft = 1,41.

Aufg. 84. Leite die Gleichungen ab, welche bei der adiabatischen Zustandsänderung a) zwischen p und T, b) zwischen V und T bestehen. (Mit Zuhilfenahme der Zustandsgleichung.)

Aufg. 85. In Paris besteht ein ausgedehntes Rohrnetz, welches mit komprimierter Luft von 8 Atm. Überdruck gefüllt ist. Die Temperatur der Luft sei 15° C. Wie hoch ist die Temperatur, mit welcher die Luft aus einem Cylinder ausströmt, in welchem sie unter Arbeitsleistung adiabatisch sich bis zu atmosphärischem Drucke ausdehnte? Wie groß ist die von 1 cbm Luft hierbei geleistete Arbeit? (Durch Zeichnung der Zustandslinie und Ausmittelung des Inhaltes der die Arbeit darstellenden Fläche zu berechnen.)

Aufg. 86. Wie lautet die Lösung der vorigen Aufgabe, wenn die Luft vor Eintritt in den Cylinder auf 100° C. vorgewärmt wird? Wie groß sind die Betriebskosten einer Pferdekraft in der Stunde, wenn 1 cbm komprimierter Luft mit 9,6 Pf. bezahlt wird?

Anm. Wenn man die Luft ausströmen lassen wollte, ohne daß sie durch Zurückschieben des Kolbens eine Arbeit leistete, so würde die frei werdende Arbeit sich in lebendige Kraft des mit sehr großer Geschwindigkeit austretenden Gasstromes verwandeln. Durch die Reibung an den äußeren ruhenden Luftschichten würde aber diese lebendige Kraft wieder in Wärme zurückverwandelt werden und daher keine Kühlung eintreten.

Um mit Hilfe der Druckluftleitung einen Raum in der heißen Jahreszeit mit kühler Luft zu versorgen, muß man daher notwendig die sich ausdehnende Luft eine Arbeit verrichten lassen. Wenn keine andere Verwendung für diese Arbeitsleistung vorliegt, kann man sie dazu verwenden, um umgekehrt wieder Luft in die Druckleitung einzupumpen. Die Menge der wieder rückwärts eingepumpten Luft ist aber notwendig kleiner, als die zum Betriebe der Pumpe verbrauchte. Es liegt dies daran, daß beim Einpumpen die Temperaturen erheblich höher sind, als bei der Ausdehnung der Betriebsluft. Die adiabatische Linie erscheint nach oben verschoben und die Arbeit für 1 kgr Luft entsprechend vergrößert. Der Cylinder für das Einpumpen muß daher einen geringeren Querschnitt erhalten, als der Betriebscylinder.

Die eingepumpte Luft wird vor ihrem Eintritte in die Rohrleitung durch ein Schlangenrohr geführt, das von Kühlwasser umgeben ist, um sie wieder auf eine niedrigere Temperatur zu bringen.

Aufg. 87. Wieviel l Kühlwasser braucht man, wenn 1 cbm Luft unter atmosph. Druck auf 10 Atm. Überdruck gebracht und dann gekühlt werden soll, wenn Wasser und Luft vorher die Temperatur 20° C. und nach Beendigung des Vorganges 40° C. haben sollen?

Aufg. 88. Wie kann man mit Hilfe der spezifischen Wärmen c_p und c_v und der Größe R für atmosphärische Luft den Arbeitswert der Calorie berechnen?

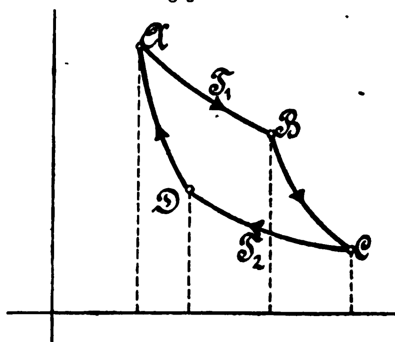
127. Der Kreisprozeß und die calorischen Maschinen. Die mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um unsere Maschinenanlagen zu treiben, wird zum größten Teile durch Umwandlung von Wärme in Arbeitsleistung bezw. in äußere lebendige Kraft gewonnen. Hierzu eignen sich alle luftförmigen Körper, welche durch Zuführung von Wärme in einen Zustand höheren Druckes versetzt und bei der Ausdehnung zur Überwindung eines entsprechenden Kolbendruckes verwendet werden können. Man bezeichnet die diesen Zwecken dienenden Maschinen mit dem gemeinsamen Namen der calorischen Maschinen. Die wichtigste calorische Maschine ist die Dampfmaschine; auf sie kann erst bei der Behandlung der Dämpfe näher eingegangen werden.

Der luftförmige Körper, durch dessen Zustandsänderungen Wärme in nutzbare Arbeit verwandelt wird, heißt die Arbeitsflüssigkeit der calorischen Maschine. Die Arbeitsflüssigkeit kann entweder nach einem Umlaufe der Maschine entfernt und durch eine neue Menge derselben ersetzt werden oder sie kann, nachdem sie in den früheren Zustand zurückgebracht ist, immer wieder von

neuem verwendet werden. Im letzteren Falle heißt die Maschine eine geschlossene calorische Maschine und die immer wieder zum Anfangszustande zurückführende Reihenfolge der Zustandsänderungen der Arbeitsflüssigkeit heißt ein Kreisprozeß. Auch dann, wenn die Maschine nicht geschlossen ist, vollzieht sich ein Kreisprozeß, der sich aber zum Teile außerhalb der Maschine abspielt.

Der einfachste Kreisprozeß, den man zum Betriebe einer calorischen Maschine verwenden kann, wird durch das Diagramm Fig. 23 zur Darstellung gebracht. Dasselbe besteht aus zwei isothermischen und zwei adiabatischen Linien. Zunächst dehnt sich das Gas bei einer Temperatur T_1 isothermisch (AB) und dann adiabatisch (BC) aus, bis die Temperatur auf T_2 gesunken ist. Nun wird es zuerst isothermisch (CD) und hierauf adiabatisch (DA) zusammengedrückt, bis es den Anfangszustand wieder erreicht hat. Bei den ersten beiden Zustandsänderungen wird Arbeit gewonnen, bei den letzten beiden Arbeit verbraucht. Es bleibt aber ein Arbeitsüberschuß, welcher durch das Flächenstück $ABCD$ zur Darstellung gebracht wird (§ 124).

Fig. 23.



Die Wärmemenge Q_1, welche der Arbeitsflüssigkeit während der Zustandsänderung AB zugeführt wird, muß größer sein als die ihr während der Zusammendrückung CD entzogene Q_2; der Unterschied $Q_1 - Q_2$ ist in Arbeit verwandelt.

128. Es ist von Wichtigkeit zu bemerken, daß zur Verwandlung der Wärmemenge $Q_1 - Q_2$ in Arbeit von der Wärmequelle eine größere Wärmemenge Q_1 hergegeben werden muß, von welcher der Teil Q_2 unverwandelt in den Kühler (während der Abkühlung CD) übergeht. Man kann nachweisen, daß dies nicht nur für den einfachsten Kreisprozeß (Fig. 23), sondern für jeden zusammen=

gesetzteren zutrifft. Von der Wärme, welche z. B. bei der Verbrennung von Steinkohlen entsteht, kann daher stets nur ein Bruchteil durch eine calorische Maschine in Arbeit verwandelt werden, der andere (erheblich größere) Teil geht unverwandelt in Körper von niedrigerer Temperatur über.

Anm. Man könnte annehmen, daß ein Kreisprozeß, welcher aus zwei isodynamischen und zwei isometrischen Zustandsänderungen besteht, mindestens ebenso einfach wäre als der oben besprochene; das Diagramm zeigt wenigstens insofern eine einfachere Gestalt, als es ein Rechteck bildet. Indessen würden zur Hervorbringung eines solchen Kreisprozesses Wärmequellen von fortwährend veränderlicher Temperatur erforderlich sein, wodurch der Vorgang weit komplizierter würde.

129. Man kann die Arbeitsflüssigkeit den Kreisprozeß Fig. 23 auch in umgekehrter Richtung $A - D - C - B - A$ durchlaufen lassen. Hierzu muß die durch die Fläche $ABCD$ repräsentierte Arbeit geleistet werden, zugleich wird aber eine Wärmemenge Q_2 aus einem kühleren Körper in einen wärmeren übergeführt. Durch Umkehrung der Wirkungsweise einer calorischen Maschine erhält man daher eine Kaltluft- oder Eismaschine.

130. Ausfluß der Gase aus Gefäßen. Die Bewegungserscheinungen der Gase würden in jeder Hinsicht mit denjenigen des Wassers verglichen werden können, wenn sich die Gase nicht erheblich ausdehnten, sobald sie nach Orten niederen Druckes oder höherer Temperatur gelangen. Hierdurch wird in vielen Fällen der ganze Verlauf der Strömung, gegenüber der beim Wasser stattfindenden, beträchtlich geändert, obschon auch dann noch eine Übereinstimmung in großen Zügen bestehen bleibt.

Die Bewegungserscheinungen der Luft sind nach dem Gesagten zusammengesetzterer Art, als diejenigen des Wassers. Wenn indessen der Druck nicht erheblich wechselt, sind die Abweichungen von geringerer Bedeutung und man kann näherungsweise die für das Wasser gefundenen Gesetze auch hier als giltig ansehen. Nach § 86 ist die Geschwindigkeit, mit welcher eine ihr Volumen nicht ändernde Flüssigkeit aus einem Gefäße ausströmt,

$$v = c\sqrt{2gh}.$$

Wollen wir den jetzt vorliegenden Fall mit jenem vergleichen, so müssen wir uns an Stelle der Luft eine tropfbare Flüssigkeit

von demselben spezifischen Gewichte wie die Luft gesetzt denken; h bedeutet die Druckhöhe in einer Säule dieser Flüssigkeit ausgedrückt. Durch Bestimmung des Coeffizienten c aus besonderen Versuchen kann man auch der Abweichung Rechnung tragen, welche etwa durch das elastische Verhalten des Gases hervorgebracht wird.

Für das Volumen V, das in der Sekunde ausströmt, kann man in derselben Weise (§ 87)

$$V = k \cdot f \cdot \sqrt{2gh}$$

setzen.

Die Druckhöhe h in diesen Formeln ist etwas unbequem, da sie nicht direkt beobachtet werden kann. Gewöhnlich wird der Überdruck im Gefäße in Wasser- oder Quecksilbersäulen, seltener in Atmosphären angegeben. Bedeutet h' die Höhe der Wasser- oder Quecksilbersäule, γ' das Gewicht von 1 cbm Wasser oder Quecksilber und γ dasjenige von 1 cbm des Gases im Gefäße, so ist $h = \frac{\gamma'}{\gamma} h'$ und

$$v = c\sqrt{2gh'\frac{\gamma'}{\gamma}}; \quad V = kf \cdot \sqrt{2gh'\frac{\gamma'}{\gamma}}.$$

Eine Druckangabe in Atmosphären kann leicht auf eine Wassersäule umgerechnet werden.

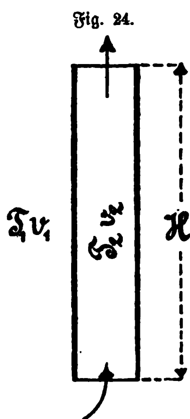
131. Mit Hilfe der höheren Mathematik kann leicht die Geschwindigkeitsformel abgeleitet werden, welche für ein Gas gilt, das ohne Abgabe oder Zufuhr von Wärme (adiabatisch) ausströmt. Indessen zeigt sich, daß für den technisch wichtigen Fall, daß der Überdruck nur einen geringen Bruchteil des äußeren Druckes ausmacht, die adiabatische Formel in die vorstehende übergeht. Auch durch Versuche ist die Anwendbarkeit der Formel selbst für beträchtlichere Druckunterschiede bestätigt. Die Coeffizienten c und k stimmen mit den für den Ausfluß des Wassers ermittelten überein.

Aufg. 89. Wieviel cbm Leuchtgas strömen in der Stunde durch eine Öffnung in dünner Wand von 6 qcm Querschnittsfläche, wenn der Überdruck 30 mm Wassersäule beträgt und das Gewicht von 1 cbm Leuchtgas im Mittel zu 0,55 kgr gerechnet werden kann? ($k = 0{,}62$.)

Aufg. 90. Wie groß ist der Überdruck, welcher erfordert wird, um der ausströmenden atmosphärischen Luft eine Geschwindigkeit a) von 2 m, b) von 20 m, c) von 200 m zu verleihen? ($c = 0{,}97$.)

132. Bewegung der Luft in Schornsteinen ohne Berücksichtigung der Reibung. Wir betrachten ein senkrechtes Rohr (Fig. 24), das oben offen ist und in welchem die Temperatur durch eine unten angebrachte Feuerung fortwährend auf der Höhe T_2 erhalten wird, während sie außen T_1 ist. Nach unten soll das Rohr durch einen Schieber geschlossen sein, in dem sich eine enge Öffnung befindet.

Fig. 24.



Wenn der Schieber ganz geschlossen ist, wirkt auf denselben ein Überdruck von außen nach innen, weil sich außerhalb des Rohres vom oberen Ende an der Druck um die Druckhöhe H kalter und daher dichterer Luft, innen um die Druckhöhe H wärmerer und daher leichterer Luft steigert. Der Überdruck, ausgedrückt in einer Druckhöhe äußerer Luft, sei mit h bezeichnet; dann ist (§ 125)

$$h = H\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) = H\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) = H\,\frac{T_2 - T_1}{T_2}.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher die kalte Luft einströmt, ist daher

$$v = c\sqrt{2gH\,\frac{T_2 - T_1}{T_2}}$$

und das Volumen kalter Luft V_k, welches in der Sekunde durch den Schornstein fließt, wenn der Querschnitt der Öffnung mit f bezeichnet wird,

$$V_k = k\cdot f\sqrt{2gH\,\frac{T_2 - T_1}{T_2}}.$$

Das Volumen V_k giebt ein Volumen V_w an warmer Luft, das

$$V_w = kf\sqrt{2gH\,\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{T_2 - T_1}{T_1}}$$

ist. Würde man dagegen das Rohr unten offen lassen und den Schieber am oberen Ende anbringen, so wäre ein von innen nach außen gerichteter Überdruck vorhanden, der sich in einer Druckhöhe h' warmer Luft ausdrücken läßt, die

$$h' = H \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

ist. Man erhält so die Durchflußmengen V_w' und V_k'

$$V_w' = kf \sqrt{2gH \frac{T_2 - T_1}{T_1}},$$

$$V_k' = kf \sqrt{2gH \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_2}}.$$

Die Werte stimmen nicht mit den früher erhaltenen überein; sie sind kleiner als diese. Ist die Röhre oben und unten offen, so daß jetzt f den vollen Rohrquerschnitt bedeutet, so können nur die kleineren Werte V_w' und V_k' wirklich zustande kommen, da die obere Mündung diejenige ist, durch welche das Gas mit der größten Geschwindigkeit strömt.

133. An der vorstehenden Betrachtung ändert sich nichts, wenn das Rohr schief steht oder auch wenn es irgendwie gebrochen oder gekrümmt ist. Unter H ist dann stets der senkrechte Abstand zwischen den beiden Mündungen zu verstehen. Allerdings wird in diesen Fällen ein größerer Teil der vorhandenen Überdruckhöhe zur Überwindung der Bewegungswiderstände verbraucht, als bei geradem senkrechten Rohre. Man darf daher die vorausgehenden Formeln nur mit Vorsicht anwenden, weil auf die Reibungswiderstände im Rohre bei ihnen noch gar keine Rücksicht genommen ist. Sie geben zu große Durchflußmengen, wenn der Einfluß der Reibung merklich wird.

Aufg. 91. Ein Ventilationsschacht hat quadratischen Querschnitt von 25 ^{cm} Weite und 8 ^{m} Höhe. Wieviel cbm Luft führt er in der Stunde ab, wenn die Innentemperatur 15° C. höher ist als die äußere?

Aufg. 92. Welche Höhe muß man einem Glasrohre (Lampencylinder) geben, das unten mit einer Zuflußöffnung von 1,2 ^{qcm} Querschnittsfläche versehen ist, wenn bei einem Temperaturunterschiede von 150° C. in der Stunde 0,5 ^{cbm} Luft durch dasselbe abgeführt werden sollen? ($k = 0{,}62$.)

134. Winddruck. Für den Stoß der Luft gegen feste Körper wendet man dieselben Formeln an, wie für den Stoß des Wassers und ermittelt die in denselben vorkommenden Coefficienten durch besondere Versuche. Der wichtigste Fall ist der senkrechte Stoß

einer unbegrenzten Luftmasse (des Windes) gegen eine ruhende Wand. Darauf lassen sich sowohl der schiefe Stoß als der Stoß gegen eine selbst in Bewegung begriffene Wand ohne weiteres zurückführen, wie in § 96 des vorigen Abschnittes.

In dem bezeichneten einfachsten Falle läßt sich der Winddruck darstellen durch die Formel

$$P = \alpha \cdot f v^2,$$

wo α ein durch die Erfahrung zu etwa 0,12 festgestellter Coeffizient ist, wenn als Längeneinheit 1 m genommen wird.

Aufg. 93. Ein Windrad besitzt am Umfange eine größere Zahl unter einem Winkel von 20° gegen die Radebene geneigte Bretter, deren Gesamtfläche 8 qm beträgt. Der mittlere Radius sei 2 m, die Tourenzahl 25 und die Windgeschwindigkeit 6 m. Wieviel Pferdekräfte leistet das Rad? Wie ändert sich dies ab, wenn man a) den Winkel von 20° auf 30° oder 40° vergrößert; b) das Rad 15, 20, 30, 35, 50 Touren machen läßt?

Anl. z. L. Die Relativbewegung des Windes gegen ein Brett wird erhalten durch Zusammensetzen der Windgeschwindigkeit mit einer der Geschwindigkeit des Brettes entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit. Nach § 94 erhält man aus dem Winkel zwischen Relativgeschwindigkeit und Wandebene den Normaldruck und hieraus die in die Bewegungsrichtung fallende Komponente. Durch Multiplikation mit dem Wege erhält man die von dieser geleistete Arbeit und daraus schließlich die Zahl der Pferdestärken.

Aufg. 94. Wie groß darf das Gewicht eines Fallschirmes von 10 m Durchmesser einschließlich der Belastung sein, wenn die Geschwindigkeit des Heruntersinkens 4 m pro Sekunde nicht übersteigen soll und wenn mit Rücksicht auf die nach unten hohle Form $\alpha = 0{,}16$ gesetzt werden kann?

135. Bewegung der luftförmigen Körper in Röhren. Der Druckhöhenverlust, welcher bei gleichförmiger Bewegung eines Gases mit der Geschwindigkeit v in einer Röhre vom Umfange U und der Fläche f für die Längeneinheit der Röhre eintritt, kann der Erfahrung zufolge ähnlich wie bei der Wasserbewegung (§ 106) gesetzt werden

$$K \cdot \frac{U}{f} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

worin K für 1 m als Längeneinheit bei gewöhnlichen Luftleitungen gleich 0,006 angenommen werden kann. Für sehr rauhe Wände u. s. w. rechnet man K besser etwas größer bis zu 0,01.

An Stelle von v wird häufig bequemer die sekundliche Durchflußmenge Q eingeführt, ebenso der Druckhöhenverlust auf Wassersäulen umgerechnet. Für ein Rohr von kreisförmigem Querschnitte erhält man so

$$h_w = K \cdot \frac{Q^2}{\pi^2 g r^5} \cdot \frac{\gamma'}{\gamma},$$

wenn h_w den Druckhöhenverlust für die Längeneinheit in Wassersäulen, r den Radius und $\frac{\gamma'}{\gamma}$ das Verhältnis der Gewichte gleicher Volumina Wasser und Gas bedeuten.

136. Unter Berücksichtigung der Reibung an den Rohrwänden gestaltet sich die Lösung der in § 132 behandelten Aufgabe wie folgt. Für den Fall, daß die Öffnung, in welcher die zu berechnende größte Geschwindigkeit auftritt, am oberen Ende des Rohres liegt, ist der wirksame Überdruck in Säulen warmer Luft ausgedrückt $H\frac{T_2 - T_1}{T_1}$. Hiervon wird ein Teil zur Überwindung der Reibung, der andere zur Hervorbringung der Geschwindigkeit v verbraucht. Man erhält so die Gleichung

$$v^2 = c^2 \cdot 2g \left\{H\frac{T_2 - T_1}{T_1} - K\frac{U}{f} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot H\right\}.$$

Durch Auflösen derselben nach v findet man

$$v = c\sqrt{2gH\frac{T_2 - T_1}{T_1}} : \sqrt{1 + c^2 KH\frac{U}{f}}.$$

Das Volumen V_w an warmer Luft ergiebt sich hieraus durch Multiplikation mit dem Flächeninhalte der Mündung (und dem Kontraktionscoeffizienten). Man sieht, daß der Ausdruck sich von dem in § 132 gefundenen nur durch den Divisor unterscheidet. Innerhalb des letzteren kann übrigens der Faktor c^2, welcher nicht viel kleiner als 1 ist, neben dem nur ungenau ermittelten Faktor K gestrichen werden.

Aufg. 95. Wie lautet die Lösung der Aufg. 91 unter Berücksichtigung der Reibung?

Aufg. 96. Für die Widerstandshöhe einer Leuchtgasleitung von der Länge l wird die Formel angegeben

$$h_w = 0{,}9\,\frac{Q^2}{d^5}\,l,$$

wo h_w in mm Wassersäule, Q in cbm pro Stunde, d in cm, l in m einzusetzen sind. Welchen Wert hat hier K?

Aufg. 97. Wie groß muß der Durchmesser eines Schornsteinrohres sein, das in der Stunde 200 ^{cbm} warme Luft abführen soll, wenn $H = 15^{m}$, die zur Berechnung des Widerstandes einzuführende Länge aber 40^{m}, die Außen- und Innentemperatur $+ 10^{0}$ C. und $+ 190^{0}$ C. sind und der Sicherheit wegen $K = 0{,}012$ gerechnet wird? (Auflösen der Gleichung durch Probieren.)

Drittes Kapitel.

Die Dämpfe.

137. Unter Dämpfen versteht man die luftförmigen Körper, welche sich in der Nähe ihres Verflüssigungspunktes befinden. Früher glaubte man einen besonderen Unterschied zwischen den Dämpfen und denjenigen Gasen machen zu müssen, die nicht in den flüssigen Aggregatzustand gebracht werden konnten; diese Unterscheidung ist hinfällig geworden, seit man alle bekannten Gase verflüssigen konnte.

Wenn ein geschlossenes Gefäß teilweise mit einer Flüssigkeit gefüllt ist, sammeln sich in dem übrigen Teile Dämpfe der Flüssigkeit an. Die Dampfmenge hängt von der Temperatur ab, von der wir annehmen wollen, daß sie für alle Teile des Gefäßes und seines Inhaltes von gleicher Größe sein soll. Dagegen ist es hierfür gleichgiltig, ob der von der Flüssigkeit nicht ausgefüllte Teil des Gefäßes vorher luftleer war oder irgend ein anderes Gas enthielt.

Mit der Temperatur wächst die Dampfmenge und umgekehrt. Wenn (durch Zurückschieben eines Kolbens) der Raum des Gefäßes langsam vergrößert und dabei die Temperatur fortwährend auf gleicher Höhe erhalten wird, verdampft ein Teil der Flüssigkeit, bis in jeder Volumeneinheit sich ebensoviel Dampf befindet als vorher. Ebenso schlägt sich bei einer Verkleinerung des Gefäßraumes so viel Dampf als Flüssigkeit nieder, als sich in dem in Wegfall gekommenen Teile des Gefäßraumes befunden hatte.

Hiernach ist der Druck des Dampfes unabhängig von der Größe des Dampfraumes, abhängig dagegen von der Temperatur.

Befindet sich etwa neben Wasserdampf noch atmosphärische Luft in dem Gefäße, so ist der gesamte Druck des Gemisches als eine Summe aus zwei Teilen aufzufassen. Der von dem Dampfe herrührende Druck befolgt die eben besprochenen, der Druck der atmosphärischen Luft die im vorigen Kapitel behandelten Gesetze. Dasselbe gilt auch von dem spezifischen Volumen des Gemisches.

Unter den soeben betrachteten Umständen heißt der Dampf gesättigt. Trennt man gesättigten Dampf von seiner Flüssigkeit und erhöht bei gleich bleibendem Volumen die Temperatur oder vergrößert man das Volumen bei konstanter Temperatur, so erhält man überhitzten Dampf. Verfährt man mit gesättigtem Dampfe umgekehrt, so schlägt sich ein Teil desselben als Flüssigkeit nieder (kondensiert sich) und der Rest bleibt gesättigt. Unter gewissen Umständen kann dies allerdings unterbleiben; der Dampf heißt dann unterkühlt. Unterkühlter Dampf in Berührung mit festen Körpern (z. B. Staubteilchen) geht indessen unter Niederschlag der entsprechenden Flüssigkeitsmenge sofort wieder in gesättigten Dampf über. In den technischen Anwendungen hat man es daher immer nur entweder mit gesättigtem oder überhitztem Dampfe zu thun.

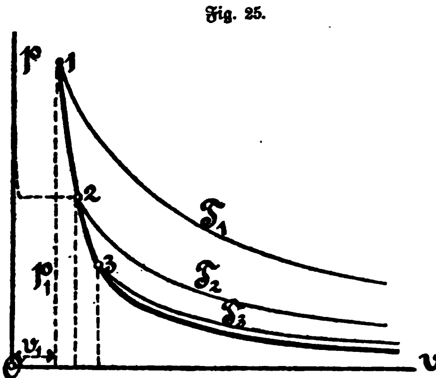
138. Je mehr ein Dampf überhitzt wird, desto mehr nähert er sich in seinem Verhalten einem vollkommenen Gase; in der That sind alle Gase überhitzte Dämpfe. Für überhitzte Dämpfe gilt daher auch die Zustandsgleichung (§ 122); die Konstante R hat für Wasserdampf den Wert 46,8.

Die Zustandsgleichung trifft allerdings für kein in der Natur vorkommendes Gas in aller Strenge ein; die Abweichungen davon sind in den gewöhnlich vorkommenden Fällen allerdings nur geringfügig, sie werden aber um so größer, je mehr sich der Dampf dem Sättigungszustande nähert.

139. Für jeden luftförmigen Körper gibt es eine kritische Temperatur, oberhalb deren er durch noch so weit gehende Zusammendrückung nicht verflüssigt werden kann. Im Anhange befindet sich eine Zusammenstellung der kritischen Temperaturen einer Reihe von Gasen.

140. In übersichtlicher Weise lassen sich diese Verhältnisse durch das Diagramm Fig. 25 zur Darstellung bringen. Die stark ausgezogene Linie 1, 2, 3 ... stellt die Abhängigkeit des Druckes vom spezifischen Volumen des gesättigten Wasserdampfes dar; sie ist nach den Ergebnissen von Versuchen zu ziehen. Jeder Punkt der Zeichenfläche, welcher nach rechts oben von dieser Linie liegt, entspricht einem Zustande überhitzten, ein Punkt links bezw. unterhalb der Linie einem Zustande unterkühlten Wasserdampfes.

Fig. 25.



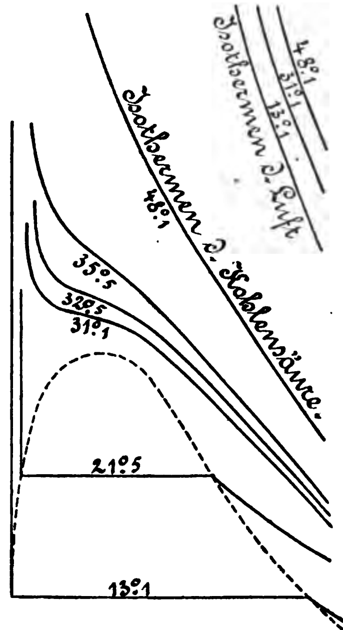
Die mit $T_1 T_2 \ldots$ bezeichneten Linien stellen isothermische Zustandskurven des überhitzten Dampfes dar, die wie oben bemerkt in einiger Entfernung von der Linie 1, 2 ... der Zustandsgleichung entsprechen (also gleichseitige Hyperbeln sind, Aufg. 83). Nur in nächster Nähe der Linie tritt eine merkliche Abweichung davon auf, die aber für unsere Anwendungen nicht in Betracht gezogen zu werden braucht.

Wenn überhitzter Wasserdampf, z. B. bei der Temperatur T_2 isothermisch zusammengedrückt wird, folgt er bis zum Punkte 2 der mit T_2 bezeichneten Zustandskurve. Bei weiterer Zusammendrückung schließt sich an diese die in der Figur punktiert angegebene horizontale Linie, die erst kurz vor der p-Achse in eine nahezu senkrecht aufsteigende übergeht. Während der Zustandsänderung längs der horizontalen Linie besteht die Masse aus tropfbarer Flüssigkeit und gesättigtem Dampfe.

Auch die kritische Temperatur kann in dem Diagramm ersichtlich gemacht werden. Oberhalb derselben treffen nämlich die isothermischen Linien T die Linie des gesättigten Dampfes, d. h. die Verlängerung der Linie 1, 2 ... nach oben hin nicht mehr. Bei Wasserdampf liegt die kritische Temperatur so hoch (+411,7° C.),

daß sie für die Anwendungen wenigstens vorläufig nicht in Betracht kommt. Fig. 26 zeigt das Diagramm für Kohlensäure, für welche die kritische Temperatur ungefähr + 31° C. ist. Die punktierte Linie entspricht dem gesättigten Dampfe, der Scheitel der kritischen Temperatur. Links von dem linken Aste sind die Zustände der flüssigen Kohlensäure dargestellt.

Fig. 26.



Aufg. 98. Zeichne nach den Angaben der im Anhange befindlichen Tabellen die Fig. 25 für Wasserdampf in genauem Maßstabe und zeichne die Isothermen T für die Celsiustemperaturen 100°, 120°, 140°, 160° ein.

141. Siedepunkt. So lange in dem in § 137 betrachteten Falle der über der tropfbaren Flüssigkeit befindliche Raum noch nicht mit gesättigtem Dampfe gefüllt ist, findet fortdauernd eine weitere Verdampfung statt, bis dieser Endzustand erreicht ist. Dasselbe trifft zu, wenn der neu gebildete Dampf immer wieder auf irgend eine Art entfernt wird.

Im allgemeinen findet diese Verdampfung aber nur an der an den Dampfraum grenzenden Oberfläche statt. Eine Verdampfung durch Bildung und Vergrößerung von Dampfbläschen aus dem Innern der Flüssigkeit wird Sieden genannt. Das Sieden tritt erst ein, wenn die Temperatur einen gewissen Wert, den Siedepunkt erreicht hat, der ausschließlich von dem Drucke abhängt, unter dem die Flüssigkeit steht.

Der Siedepunkt ist gleich der Temperatur des gesättigten Wasserdampfes bei dem gleichen Drucke. Daraus folgt, daß das Sieden sofort eintritt, wenn sich über der Flüssigkeit nur ihr eigener überhitzter Dampf oder gesättigter Dampf befindet, der regelmäßig

entfernt wird. Anders ist es, wenn sich z. B. neben Wasserdampf atmosphärische Luft in dem Gefäße befindet. Die atmosphärische Luft vermag zwar nicht zu verhindern, daß sich durch Verdampfen von der Oberfläche her (Verdunsten) der Raum allmählich mit gesättigtem Wasserdampfe füllt; sie rückt aber den Siedepunkt in die Höhe.

Ein im Betriebe befindlicher Dampfkessel enthält nur sehr wenig atmosphärische Luft im Dampfraume; der Siedepunkt, d. i. in diesem Falle die Temperatur des Wassers, ist daher nur wenig höher als die Temperatur des sich im Dampfraume befindenden gesättigten Dampfes.

142. Siedeverzug. Unter gewissen Umständen tritt kein Sieden ein, obschon der Siedepunkt überschritten ist. Die Erscheinung ist mit derjenigen des Auftretens unterkühlter Dämpfe (§ 137) zu vergleichen; beim Siedeverzuge ist das Wasser überhitzt. Ganz wie dort wird auch hier der Übergang des einen Aggregatzustandes in den anderen durch die Dazwischenkunft fremder Körperchen erleichtert und vermittelt, oder durch Fernhalten derselben erschwert. Beim Sieden sind es namentlich die kleinen Bläschen vorher im Wasser gelöster atmosphärischer Luft, welche siedevermittelnd wirken. Außer gelöster Luft sind alle äußeren Erschütterungen sorgfältig fern zu halten, wenn man überhitztes Wasser herstellen will.

Der Siedeverzug kommt zuweilen beim Dampfkesselbetriebe vor und bringt schwere Gefahren mit sich. Nach einer längeren Pause im Betriebe, während deren kein Speisewasser eingeführt wird, vermag er sich einzustellen. Durch äußere Anlässe (Dampfentnahme, Speisen, Erschütterungen) tritt dann eine plötzliche, ungemein starke Dampfbildung ein, welche leicht explosionsartige Wirkungen hervorbringt.

Aufg. 99. Wie ist a) der Siedeverzug zu vermeiden; b) woran ist er zu erkennen; c) wie hat man sich zu verhalten, wenn ein Siedeverzug anzunehmen ist?

143. Zustandsänderungen des Wasserdampfes. Diese bieten so lange nichts bemerkenswertes, als sich während derselben der Dampf nicht dem Sättigungszustande nähert oder in denselben

übergeht; es lassen sich dann die Betrachtungen der §§ 123—126 auf ihn ohne weiteres übertragen.

Von besonderem Interesse ist aber die adiabatische Zustandsänderung des ganz oder nahezu gesättigten Dampfes, weil die Expansion des Dampfes in den Dampfmaschinen ungefähr adiabatisch erfolgt.

Früher nahm man (Watt, Pambour) an, daß gesättigter Dampf bei adiabatischer Ausdehnung oder Zusammendrückung gesättigt bleibe. Dies würde bedeuten, daß die Linie 1, 2... in Fig. 25 selbst eine adiabatische Linie wäre. Clausius wies dagegen nach, daß die adiabatischen Linien etwas steiler verlaufen, als die Linien des gesättigten Dampfes. Etwas überhitzter Dampf geht also bei adiabatischer Ausdehnung unter Arbeitsleistung in gesättigten Dampf über; gesättigter Dampf dagegen schlägt sich im gleichen Falle teilweise nieder, der Rest bleibt gesättigt. Die sich niederschlagende Menge ist indessen bei der Dampfmaschine nur geringfügig, so daß die Watt'sche Annahme als näherungsweise zutreffend angesehen werden kann.

144. Verdampfungswärme. Die Wärme, welche man 1 ^{kgr} Wasser zur Überführung in gesättigten Dampf zuführen muß und welche teils zur Überwindung der Molekularanziehung, teils zur Überwindung des äußeren Druckes verbraucht wird (ohne also eine Erhöhung der Temperatur hervorzubringen), heißt die Verdampfungswärme oder latente Dampfwärme. Sie ist verschieden groß für verschiedene Verdampfungstemperaturen. Nach Regnault kann sie gleich

$$606{,}5 - 0{,}695\, t$$

Calorien gesetzt werden, wo t die Verdampfungstemperatur nach der Celsiusscala bedeutet.

Unter Gesamtwärme des Dampfes von der Temperatur t versteht man die Wärmemenge, welche man Wasser von 0° C. zuführen muß, um es in gesättigten Dampf von t^0 zu verwandeln; sie ist hiernach

$$606{,}5 + 0{,}305\, t$$

Calorien. Nach der Annahme von Watt und Pambour (§ 143) sollte die Gesamtwärme des gesättigten Dampfes unabhängig von

der Dampftemperatur sein und rund 640 Calorien betragen. Wäre dies aber auch richtig, so müßte trotzdem gesättigter Dampf bei der adiabatischen Ausdehnung sich teilweise kondensieren. Denn während der Ausdehnung wird Arbeit geleistet und das kann nur auf Kosten des Wärmevorrates des Arbeitsdampfes geschehen, wenn keine Wärme von außen zugeführt wird.

Nach den Regnault'schen Messungen ist dagegen die Gesamtwärme des (abgekühlten) Dampfes nach der Expansion geringer als vorher. Der Unterschied hat sich in Arbeit verwandelt; er reicht aber nicht ganz hin, um die Expansionsarbeit völlig zu decken. Der Rest wird durch die latente Wärme des sich kondensierenden Dampfes geliefert.

Entgegengesetzt dem Wasserdampfe verhält sich z. B. der Ätherdampf. Die Abnahme der Gesamtwärme desselben während der Expansion ist größer als zur Arbeitsleistung erforderlich ist. Bei der adiabatischen Expansion wird daher der Ätherdampf überhitzt. Umgekehrt wird der Wasserdampf überhitzt, wenn er ohne Zufuhr oder Abfuhr von Wärme zusammengedrückt wird.

Aufg. 100. 2 ^{kgr} gesättigter Wasserdampf von 100° C. werden mit 80 ^{kgr} Kühlwasser von 20° C. gemischt; wie hoch ist die Temperatur, welche das Wasser erlangt, wenn auf den bei dieser Temperatur zurückbleibenden gesättigten Dampf keine Rücksicht genommen wird?

Aufg. 101. Von einer guten Dampfkesselfeuerung (Steinkohlen) verlangt man, daß die verdampfte Wassermenge das achtfache Gewicht des verbrauchten Brennmaterials ausmachen soll; wieviel Calorien werden hiernach für 1 ^{kgr} Steinkohle nutzbar, wenn das Speisewasser die Temperatur + 20° C. und der Dampf 4 Atm. Überdruck hat?

Aufg. 102. Ein Dampfkessel hat 12 ^{cbm} Inhalt, von denen 5 ^{cbm} auf den Dampfraum kommen. Die Heizfläche betrage 25 ^{qm}, die stündliche Verdampfung bei normalem Betriebe 18 ^{l} Wasser pro Stunde und qm. Wenn die Dampfentnahme plötzlich unterbrochen, die Wärmezufuhr aber fortgesetzt wird, nach wieviel Minuten steigt die Dampfspannung auf a) 5, b) 6, c) 7, d) 10 Atm. Überdruck, wenn sie vorher 4 Atm. betrug?

Aufg. 103. Wieviel l Kühlwasser braucht man für den Betrieb einer Kondensationsdampfmaschine pro Pferdekraft, wenn (bei einer größeren Anlage) 8 ^{kgr} Dampf stündlich erfordert werden und die Temperatur im Kondensator 40° C. betragen soll, während das Kühlwasser vorher die Temperatur 15° C. hatte?

145. Die Dampfmaschinen. Man unterscheidet Hoch- und Niederdruckmaschinen. Die letzteren arbeiten stets mit, die ersteren dagegen gewöhnlich ohne Kondensation. Heute werden fast ausschließlich Hochdruckmaschinen mit mindestens 3—4, häufig auch mit 8—10 Atm. Überdruck gebaut. Die Hochdruckmaschinen zerfallen in solche mit und ohne Expansion; die letzteren werden bei sehr großen Anlagen selten verwendet, da sie die Arbeitsfähigkeit des Dampfes nur in geringerem Maße ausnützen.

Die besten heute ausgeführten Dampfmaschinen, d. h. diejenigen, welche die größte Arbeitsleistung für einen gegebenen Dampf- oder Brennmaterialverbrauch ergeben, sind größere Hochdruckmaschinen (einige hundert Pferde) für einen Überdruck von etwa 8 Atm. und mit Kondensation. Sie werden in der Regel als sog. Verbundmaschinen (Compoundmaschinen) ausgeführt, d. h. sie erhalten zwei Cylinder, einen Hochdruckcylinder von kleinerem und einen Niederdruckcylinder von entsprechend größerem Durchmesser. Der aus dem Kessel kommende Dampf expandiert zunächst in dem kleineren Cylinder bis zu etwa 2—3 Atm., entweicht dann in einen Behälter, aus dem er in den großen Cylinder gelangt, um dort weiter zu expandieren, und dann in den Kondensator zu gelangen. Die Kolbenstangen beider Cylinder greifen an derselben Hauptwelle an und sind gewöhnlich rechtwinklig zu einander versetzt. Zuweilen werden auch Dreifachexpansionsmaschinen gebaut, bei welchen der Dampf der Reihe nach einen Hoch-, einen Mittel- und einen Niederdruckcylinder durchläuft.

Der Dampfverbrauch der besten Maschinen dieser Art beträgt etwa 7—8 ^{kgr} stündlich. Kleine Dampfmaschinen brauchen das Dreifache und mehr.

Nach der Gesamtanordnung ist von besonderer Wichtigkeit die Steuerung der Dampfmaschine. Die einfachsten Steuerungen sind die Schiebersteuerungen, mit einem oder zwei übereinander liegenden Schiebern. Zwei Schieber verwendet man, um den Dampf bei irgend einer beliebigen Kolbenstellung abzusperren und so jeden verlangten Expansionsgrad herbeiführen zu können.

Um das Absperren des Dampfes nicht nur an jeder beliebigen Stelle, sondern auch möglichst schnell bewirken zu können, verwendet

man in neuerer Zeit häufig die Hahn- oder Ventilsteuerungen. Die Zahl der Konstruktionen dieser Art ist so groß, daß hier nicht an ein Aufzählen derselben gedacht werden kann.

Gewöhnlich führt man größere Dampfmaschinen mit einer Steuerung aus, welche durch den Regulator selbstthätig auf höhere Füllung (und dementsprechend größere Arbeitsleistung, aber auch größeren Dampfverbrauch) gestellt wird, wenn die Maschine anfängt langsamer zu laufen, also größere Widerstände zu überwinden hat. Bei schnellerem Laufe tritt geringere Füllung, damit geringere Arbeitsleistung, zugleich aber bessere Ausnützung der Arbeitsfähigkeit des Dampfes ein.

Im übrigen werden die Maschinen noch nach der Art ihrer Aufstellung (horizontale, vertikale, Wanddampfmaschinen, Lokomobilen, Zwillingsmaschinen) unterschieden; indessen sind diese Unterschiede nur rein äußerliche.

146. Zustandsänderung des Dampfes in der Dampfmaschine. So lange durch die Steuerung eine Verbindung zwischen der einen Seite des Dampfcylinders und dem Dampfkessel unterhalten wird, ist der Druck im Cylinder nur unerheblich niedriger als im Kessel. Ein geringer Druckunterschied wird verbraucht, um die Bewegung des Dampfes durch die Zuleitung mit der erforderlichen Geschwindigkeit hervorzurufen. In der Regel wird der Querschnitt der Zuleitungskanäle so bemessen, daß die Geschwindigkeit des Dampfes in denselben 25 ^{m} pro Sekunde nicht übersteigt.

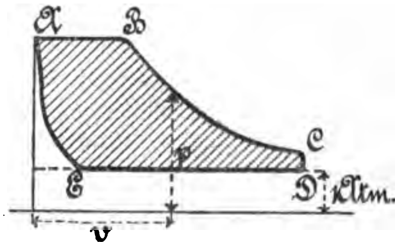
Ein größerer Druckunterschied tritt auf beim Drosseln des Dampfes. Das Drosseln wird hervorgerufen durch eine starke Querschnittsverengung, die etwa durch eine Drosselklappe oder auch durch eine Schiebersteuerung kurz vor dem Absperren hervorgebracht wird. Der Dampf wird genötigt, durch den engeren Querschnitt mit beträchtlich gesteigerter Geschwindigkeit zu fließen, wodurch eine erhebliche Druckabnahme bedingt wird.

Während sich vor dem Absperren das Dampfvolumen im Cylinder durch Zufuhr frischen Dampfes vergrößert, findet nach dem Absperren eine Expansion des vorhandenen Dampfes statt. Man könnte annehmen, daß diese Zustandsänderung eine adiabatische sei und so erfolge, wie es oben (§ 143) besprochen wurde. In Wirklichkeit

trifft diese Annahme aber nicht völlig zu wegen des ungemein schnell stattfindenden Wärmeaustausches zwischen dem Dampfe und den Cylinderwänden. Zu Beginn der Expansion giebt der Dampf Wärme an die kühlere Cylinderwand ab, gegen Ende derselben hat sich dagegen die Dampftemperatur so erniedrigt, daß nun die Cylinderwände wärmer sind als der Dampf und diesem Wärme mitteilen. Selbstverständlich kommt dabei viel darauf an, daß der Cylinder nach außen hin (z. B. durch einen Dampfmantel) gegen Wärmeverluste geschützt ist.

Genauen Aufschluß über die Zustandsänderung des Dampfes in der Dampfmaschine giebt das Indikatordiagramm. Dasselbe ist eine Zeichnung, welche von einem Instrumente, dem Indikator, während des Ganges der Maschine selbstthätig angefertigt wird. Dieselbe besteht 1) aus der horizontalen Linie AB (Fig. 27), deren Höhe über der Basis in einem bestimmten Maßstabe den Kolbendruck angiebt, während der Abstand irgend eines Punktes von der senkrechten Achse dem Kolbenwege entspricht; 2) aus der Zustandskurve BC des expandierenden Dampfes; 3) aus der senkrechten Linie CD, welche der plötzlichen Druckabnahme bei Öffnung des nach außen führenden Kanales entspricht; 4) aus der Horizontalen DE, deren Höhe über der Basis gleich 1 Atm. ist, wenn die Maschine nicht mit Kondensation arbeitet; 5) aus der Zustandskurve EA, welche wegen der Kompression des im Cylinder nach erfolgter Absperrung befindlichen Dampfes zustande kommt.

Fig. 27.



Die Fläche des Diagramms giebt die auf der einen Cylinderseite während einer Umdrehung geleistete Arbeit (indizierte Arbeit) an (§ 124).

Bei einer Kondensationsmaschine sinkt die Linie DE beträchtlich, bis nahezu an die Basis. Der Flächenzuwachs, den das Diagramm hierdurch erfährt, giebt unmittelbar den Gewinn an Arbeit an, welcher durch die Kondensationseinrichtung herbeigeführt wird.

Aus der Fläche des Diagramms ergiebt sich leicht (bei gegebener Umdrehungszahl u. s. w.) die Zahl der Pferdekräfte, welche die Maschine leistet. Von dieser indizierten Leistung ist die effektive Leistung der Dampfmaschine zu unterscheiden. Sie ist geringer als jene wegen der Arbeit, welche für die Überwindung der Reibungen in der Maschine verbraucht wird. Man findet sie, indem man einen Abzug von 12—15% von der indizierten Leistung macht.

147. Um die Arbeitsleistung einer neu zu konstruierenden Dampfmaschine vorher bestimmen zu können, muß man ein Indikatordiagramm derselben von vornherein konstruieren. In den meisten Fällen genügt es hierfür, die Zustandslinie BC so zu konstruieren, als wenn der Dampf wie ein vollkommenes Gas dem Boyle'schen Gesetze gehorchte (§ 125), die Linie BC wird dann ein Hyperbelbogen; dasselbe gilt von der Linie EA, die indessen nur wenig in Betracht kommt.

Man erhält auf diesem Wege zwar nur ein unvollkommenes Bild von dem wahren Vorgange, das aber für praktische Zwecke meistens genügt. Wenn Indikatordiagramme von ähnlich gebauten Maschinen bereits vorliegen, thut man gut, das nach der gegebenen Vorschrift konstruierte Diagramm durch Abänderung der Linien an diese näher anzuschließen.

Aufg. 104. Der Kolben einer Dampfmaschine hat bei einer gewissen Stellung die Geschwindigkeit von $1{,}4^{m}$ pro Sekunde; der zufließende Dampf wird an einer Stelle gedrosselt, so daß der freie Querschnitt $^1/_{200}$ des Cylinderquerschnittes ausmacht. Wie groß ist der Dampfdruck im Cylinder, wenn er im Kessel 3 Atm. Überdruck beträgt?

Aufg. 105. Zeichne das Indikatordiagramm einer Expansionsmaschine ohne Kondensation bei 0,3 Füllung und 4,5 Atm. Überdruck. Wieviel Dampf wird hiernach mindestens für eine Pferdekraft verbraucht?

Anl. z. L. Man nehme Umdrehungszahl, Cylinderdurchmesser und Kolbenhub beliebig an, konstruiere das Diagramm nach § 147 und berechne indizierte und effektive Leistung nach § 146. Das verbrauchte Dampfvolumen drücke man in Gewichtseinheiten mit Hilfe der Tabelle im Anhange aus.

148. Die Kaltdampfmaschinen. Die gebräuchlichsten Maschinen zur Hervorbringung von Eis oder kalter Luft sind ebenfalls als Dampfmaschinen mit Kondensation zu betrachten. Man verwendet

Flüssigkeiten (gewöhnlich Ammoniak mit oder ohne Wasserverdünnung, schweflige Säure oder eine Mischung der letzteren mit Kohlensäure, die sog. Pictetflüssigkeit) mit sehr tief liegendem Siedepunkte. An Stelle der Kesselfeuerung der gewöhnlichen Dampfmaschine tritt hier die Heizung durch die Körper, deren Temperatur man erniedrigen will, bei der Eismaschine Wasser von 0° C. Das gefrierende Wasser heizt durch Abgabe seiner latenten Wärme die siedende Flüssigkeit. Die Dämpfe derselben treten in den Dampfcylinder und leisten beim Hingange eine gewisse Arbeit; eine Expansion findet nicht statt. Beim Rückgange beginnt sofort die Kompression und die stark komprimierten Dämpfe werden nach dem Kondensator entlassen, der mit Kühlwasser von gewöhnlicher Temperatur umgeben ist. Aus dem Kondensator geht die tropfbare Flüssigkeit unter Arbeitsleistung wieder in den Dampfkessel über.

Die beim Hingange im Dampfcylinder von dem frischen Dampfe geleistete Arbeit ist erheblich geringer, als die beim Rückgange zur Kompression aufgewendete Arbeit. Daher kommt es, daß eine Kaltdampfmaschine keine Arbeit abgiebt, sondern daß ihr Arbeit zugeführt werden muß, um sie im Gange zu erhalten.

Die Berechnung der Kaltdampfmaschine kann in derselben Weise wie bei den gewöhnlichen (Wasser-) Dampfmaschinen erfolgen, wenn man einerseits das Indikatordiagramm und andererseits die Verdampfungswärme der Arbeitsflüssigkeit kennt.

149. Die Dämpfe der Salzlösungen. Enthält das Gefäß, von dem in § 137 die Rede war, an Stelle reinen Wassers eine Salzlösung oder Wasser, das mit Schwefelsäure gemischt ist oder eine Natron- oder Kalilauge, so bildet sich über der Flüssigkeit überhitzter Wasserdampf. Bei gleicher Temperatur enthält der Raum nämlich weniger Dampf als im früheren Falle und dieser ist daher nach § 137 überhitzt. Der Grund für diese Erscheinung liegt in der chemischen Anziehung, welche der gelöste Körper auf die in der Verdampfung begriffenen Wasserteilchen ausübt.

Wenn die Dampfräume von zwei sonst völlig geschlossenen Gefäßen, von denen das eine reines Wasser, das andere eine Salzlösung enthält, durch ein Rohr verbunden sind, kann Gleichgewicht

nur dann eintreten, wenn das erste Gefäß auf niederer Temperatur gehalten wird, als das zweite. Der Dampf über dem reinen Wasser hat die Temperatur des letzteren und ist gesättigt, im anderen Gefäße ist die Dampftemperatur höher und der Dampf ist überhitzt; der Dampfdruck ist in beiden Gefäßen gleich. Der Dampf über der Salzlösung übt demnach einen geringeren Druck aus, als wenn das Gefäß bei der gleichen Temperatur reines Wasser enthielte. Diese Spannkraftsverminderung des Dampfes ist abhängig von der Art und der Menge des gelösten Stoffes; bei geringer Konzentration ist sie proportional der Konzentration der Lösung, bei höherer Konzentration wächst die Spannkraftsverminderung langsamer an.

Erhält man die mit einander verbundenen Gefäße beide auf derselben Temperatur, so verdampft das Wasser auf der einen Seite und auf der Seite der Salzlösung schlägt sich fortwährend Dampf nieder. Gleichgewicht tritt erst ein, wenn das Wasser vollständig überdestilliert ist.

Um Dampf von einem gegebenen Drucke aus einer Salzlösung zu erhalten, muß man demnach die Temperatur über die diesem Drucke entsprechende Siedetemperatur reinen Wassers erhöhen. Von dieser Siedepunktserhöhung gilt demnach dasselbe, was oben über die Spannkraftsverminderung der Dämpfe gesagt wurde.

Im Zusammenhange damit steht auch die Vergrößerung der Verdampfungswärme. Man muß der Salzlösung mehr Wärme zuführen, um daraus 1 ^{kgr} Dampf zu erhalten, als reinem Wasser von der entsprechenden Temperatur. Ein Teil der Verdampfungswärme wird hier zur Überwindung der Anziehung zwischen dem Wasser und dem gelösten Stoffe verwendet.

150. Auf diesen Gesetzen beruht die Honigmann'sche Natrondampfmaschine. Dieselbe besitzt zwei Dampfkessel, in deren einem sich Natronlauge von 150—200° C. befindet, während der andere, welcher jenen innig berührt, reines Wasser von wenig niedrigerer Temperatur enthält. Der Dampfdruck im zweiten Kessel ist beträchtlich höher als derjenige im ersten. Der Dampf wird aus dem Wasserkessel in den Cylinder der Dampfmaschine geleitet,

die man zweckmäßigerweise mit solcher Füllung betreibt, daß die Endspannung des expandierenden Dampfes gleich derjenigen im Laugenkessel ist. Im Laugenkessel schlägt sich der zuströmende Dampf nieder und giebt seine latente Wärme ab, die dann durch die Gefäßwand wieder dem Wasserkessel zugeleitet wird.

Während des Ganges der Maschine vermindert sich allmählich die Konzentration der Natronlauge und es sinkt damit ihre Siedetemperatur. Man erneuert dann die Füllung des Laugenkessels und dampft die verdünnte Lauge zu erneutem Gebrauche in einer besonderen Kesselanlage wieder ein.

Für manche Fälle, wie für Straßenbahnlokomotiven, hat die Natronmaschine viele Vorzüge vor der gewöhnlichen Dampfmaschine; leider sind die bisher angestellten Versuche ungünstig ausgefallen, weil es nicht gelang, das Metall des Laugenkessels gegen den Angriff der konzentrierten Lauge zu schützen.

Viertes Kapitel.

Energetik.

151. Der zweite Hauptsatz. Die eingehende Untersuchung der Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit ein Körper eine vorgeschriebene Zustandsänderung ausführe, hat zur Erkenntnis von zwei Grundgesetzen geführt, welche wir überall in der Natur erfüllt sehen und die man als die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie bezeichnet (§ 118). Der erste Hauptsatz folgt schon aus der gewöhnlichen Mechanik innerhalb des Giltigkeitsbereiches derselben. Man kann daher sagen, daß er die durch die Erfahrung bestätigte Übertragung eines Lehrsatzes der Mechanik auf die gesamte Naturlehre bildet.

Der zweite Hauptsatz dagegen steht in gar keiner näheren Beziehung zu den Lehren der gewöhnlichen Mechanik. Er spricht nur eine Erfahrungsthatsache aus, die sich ebensogut anders verhalten könnte, ohne daß dadurch irgend ein Widerspruch mit unserer ganzen übrigen Naturerkenntnis hervorgerufen würde. Aus eben

diesem Grunde bildet er aber eine ungemein wichtige Ergänzung der Mechanik, welche erst durch seine Einfügung zur Behandlung einer Reihe von wichtigen Aufgaben befähigt wird. Besonders sind es die chemischen Zustandsänderungen und die Änderungen des Aggregatzustandes, welche in unseren Tagen mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes näher erforscht wurden.

Für die durch den zweiten Hauptsatz erweiterte Mechanik gebraucht man vielfach die besondere Bezeichnung Energetik. Die heutige Energetik macht nur von den beiden Hauptsätzen Gebrauch, ohne die übrigen Sätze der Mechanik zu bedürfen.

152. Um eine Zustandsänderung eines Körpers hervorzurufen, müssen wir andere Körper auf ihn einwirken lassen. Es sei jetzt eine besonders einfache Wechselwirkung von zwei Körpern ins Auge gefaßt. Beide sollen nämlich von verschiedener Temperatur sein und nur in solcher Weise auf einander einwirken, daß ein Wärmeübergang zwischen ihnen stattfindet. Geschieht dies ohne Dazwischenkunft eines dritten Körpers, so geht die Wärme von dem wärmeren zum kälteren Körper über. Man kann sagen, daß hier eine Verwandlung von Wärme höherer Temperatur in solche von niederer Temperatur stattgefunden hat. Wir wollen diese eine positive Verwandlung nennen.

Eine negative Verwandlung würde demnach der Übergang von Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper sein. Um sie herbeizuführen muß man dritte Körper, die eine Vermittlerrolle spielen, zu Hilfe nehmen. Das einfachste Beispiel für eine solche negative Verwandlung bildet die Leistung der Eismaschine, welche in letzter Linie darin besteht, daß Wärme aus dem gefrierenden Wasser in das wärmere Kühlwasser geschafft wird (§ 148).

In den Bereich des zweiten Hauptsatzes gehört nun die Thatsache, daß man nach aller bisherigen Erfahrung eine negative Verwandlung der bezeichneten Art nicht zustande bringen kann, ohne daß zugleich in den vermittelnden Körpern dauernde Verwandlungen entgegengesetzter Art zustande kommen, welche ihrem Umfange nach der bewirkten negativen Verwandlung proportional sind.

Eine positive Verwandlung ist auch diejenige von mechanischer

Arbeit oder lebendiger Kraft oder Energie der Lage (auch von elektrischer Energie) in Wärme. In der That vermögen wir jederzeit leicht Energie, welche in einer dieser Formen auftritt, in die äquivalente Wärmemenge umzuwandeln. Auch bei den einfachsten mechanischen Vorrichtungen (Flaschenzug, Winde u. s. w.), bei denen Verwandlungen positiver oder negativer Art gar nicht beabsichtigt sind und auch sonst nicht vorkommen, lassen sich positive Verwandlungen nicht völlig vermeiden. Sie bestehen in der Umwandlung der durch die Reibung aufgezehrten mechanischen Arbeit in Wärme.

153. Nach dem bisher Gesagten lassen sich positive Verwandlungen in der Natur ohne weiteres zustande bringen, negative Verwandlungen nur auf Umwegen, nämlich durch Zuhilfenahme vermittelnder Körper, die hierbei selbst positive Verwandlungen erfahren. Um den zweiten Hauptsatz strenger aussprechen zu können, müssen wir in den Stand gesetzt sein, den Zahlenwert irgend einer positiven oder negativen Verwandlung angeben zu können.

Unter dem Verwandlungswerte der Verwandlung einer gewissen Arbeitsleistung in die äquivalente Wärmemenge Q von der absoluten Temperatur T verstehen wir den Quotienten

$$\frac{Q}{T}.$$

Bei der umgekehrten Verwandlung ändert sich nur das Vorzeichen des Verwandlungswertes.

Für die Verwandlung einer Wärmemenge von der absoluten Temperatur T_1 in die (niedrigere) T_2 ist der Verwandlungswert gleich

$$\frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1},$$

d. h. er ist so groß, als wenn Q zuerst in Arbeit und diese hierauf in Wärme von der Temperatur T_2 verwandelt würde. Derselbe Ausdruck bleibt auch noch giltig, nimmt aber einen negativen Wert an, wenn $T_2 > T_1$, d. h. wenn der Wärmeübergang eine negative Verwandlung darstellt.

Der Verwandlungswert ist gleich Null für Verwandlung von mechanischer Arbeit in lebendige Kraft, potentielle Energie, elektrischen Strom u. s. w. und umgekehrt.

154. Der zweite Hauptsatz läßt sich nun in folgender Weise aussprechen:

Die algebraische Summe der Verwandlungswerte aller in einer Maschine (oder überhaupt bei einer Reihe zusammengehöriger Zustandsänderungen) eintretenden Verwandlungen ist stets positiv (oder im Grenzfalle gleich Null), sobald ein vollständiger Kreisprozeß durchlaufen wird.

In abgekürzter Form läßt sich diese Behauptung durch die Gleichung

$$\sum \frac{Q}{T} \geqq 0$$

zur Darstellung bringen. Man hat nur die Summierung über alle Verwandlungswerte auszudehnen und muß die Voraussetzung hinzufügen, daß ein vollständiger Kreisprozeß vorliege.

Beweisen läßt sich der zweite Hauptsatz, wie Clausius, der ihn in dieser Form zuerst aussprach, zeigte, unter der Voraussetzung, daß es durch kein Mittel möglich ist, Wärme aus einem kälteren in einen wärmeren Körper überzuführen, ohne daß zugleich Verwandlungen der entgegengesetzten Art stattfinden. Das heißt mit anderen Worten, Clausius setzte den wesentlichsten Inhalt des Satzes voraus und bewies daraus die Richtigkeit der von ihm aufgefundenen mathematischen Fassung.

Es fehlt bis auf den heutigen Tag nicht an Männern von großer Urteilskraft, welche die allgemeine Giltigkeit des zweiten Hauptsatzes bezweifeln. Ihre Zahl wird aber zusehends geringer und sie haben bisher auch nicht einen einzigen Fall anzuführen vermocht, in dem der zweite Hauptsatz nicht in aller Strenge erfüllt wäre. Er ist daher und so lange dies nicht geschieht als ein in aller Strenge und ohne jede Ausnahme giltiges Naturgesetz anzusehen.

155. Unter allen Formen der Energie ist die Verbrennungswärme der Steinkohle die verbreitetste und in der Mehrzahl der Fälle die uns mit dem geringsten Kostenaufwande zugängliche. Die wichtigste Aufgabe der Maschinentechnik besteht in der Umwandlung derselben in mechanische Arbeit. Die Leistung der calorischen Maschinen, welche diesem Zwecke dienen, besteht demnach in einer negativen Verwandlung.

Die vollkommenste calorische Maschine, welche wir zur Zeit besitzen, ist die Kondensationsdampfmaschine mit Expansion; sie verwandelt den verhältnismäßig größten Teil der ihr zugeführten

Wärme in mechanische Arbeit. Die Verbrennungswärme wird hier zunächst der Arbeitsflüssigkeit im Dampfkessel zugeführt, wo sie zur Dampfbildung verbraucht wird. Im Dampfcylinder wird ein Teil derselben in Form von mechanischer Arbeit abgegeben, der andere Teil geht in das Kühlwasser des Kondensators über.

Bezeichnet T_1 die absolute Temperatur im Kessel, T_2 diejenige im Kondensator, ferner Q die dem Kessel in der Zeiteinheit zugeführte Wärme, Q_a denjenigen Teil von Q, welcher in Arbeit verwandelt wird und $Q_k = Q - Q_a$ den in das Kühlwasser übergeführten Teil, so haben wir bei dem ganzen Kreisprozesse (wenn die Kesselspeisung aus dem Kondensationswasser erfolgt) eine negative Verwandlung, deren Verwandlungswert gleich $-\frac{Q_a}{T_1}$, und eine positive, deren Verwandlungswert gleich $\frac{Q_k}{T_2} - \frac{Q_k}{T_1}$ ist. Nach dem zweiten Hauptsatze muß daher

$$-\frac{Q_a}{T_1} + \frac{Q_k}{T_2} - \frac{Q_k}{T_1} \geqq 0$$

sein. Nehmen wir zunächst an, daß die Summe der Verwandlungswerte gerade gleich Null sei und lösen die Gleichung, nachdem Q_k durch $Q - Q_a$ ersetzt ist, nach Q_a auf, so erhalten wir

$$Q_a = Q\,\frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Wäre die Summe der Verwandlungswerte gleich der positiven Größe C, so würde

$$Q_a = Q\,\frac{T_1 - T_2}{T_1} - CT_2,$$

also kleiner sein als im ersten Falle. Man erkennt daraus, daß man im günstigsten Falle nur einen Bruchteil der zugeführten Wärme in Arbeit umsetzen kann, der durch das Verhältnis $\frac{T_1 - T_2}{T_2}$ angegeben wird.

In Wirklichkeit wird dieses Verhältnis niemals ganz erreicht, weil neben dem Hauptvorgange immer noch Erscheinungen nebenher gehen, die nicht beabsichtigt sind, aber nicht völlig vermieden werden können, wie die Fortleitung der Dampfwärme durch die Cylinderwände, das Fortreißen unverdampften Wassers durch den

Dampf aus dem Kessel, der Einfluß des schädlichen Raumes, die nicht hinreichend weit fortgesetzte Expansion des Dampfes vor dem Eintritte in den Kondensator u. s. w. Alle diese schädlichen Einflüsse haben positive Verwandlungen zur Folge, welche zum Fortgange des Prozesses nichts beitragen.

156. Die wichtigste positive Verwandlung, welche mit dem Betriebe einer Dampfmaschine verbunden ist, ohne eine ihr entsprechende negative Verwandlung hervorzurufen, besteht aber in dem Wärmeübergange von den heißen Verbrennungsgasen zu dem viel kühleren Dampfkessel. Es ist klar, daß man eine Dampfmaschinenanlage ebensogut mit einer Feuerung betreiben könnte, die die Wärme (bei gleicher Menge) in viel niedrigerer Temperatur lieferte, als es die Kohlenfeuerung thut. Das Wärmegefälle zwischen den Feuerungsgasen und der Kesselwand geht hier ganz nutzlos verloren, während es bei einer anderen Einrichtung vielleicht zur Vermittelung einer entsprechenden negativen Verwandlung nutzbar gemacht werden könnte.

Die vielfachen Klagen über die ungünstige Wirkung selbst unserer besten calorischen Maschinen (welche im übrigen vielfach ohne Kenntnis des zweiten Hauptsatzes ausgesprochen werden und dann keine Beachtung verdienen) sind in diesem einen Punkte allerdings berechtigt. Eine bessere Ausnützung des Energievorrates in den Steinkohlen kann nur auf dem Wege erzielt werden, daß man den Vorgang in der Maschine schon bei einer Temperatur T_1 beginnen läßt, welche der Verbrennungstemperatur der Steinkohlen beträchtlich näher liegt, als seither.

In diesen Verhältnissen liegt auch die höhere Leistung der mit sehr hohem Dampfdrucke arbeitenden Maschinen begründet; die Kesseltemperatur ist hier höher als bei den Niederdruckmaschinen.

Um auf diesem Wege aber weitere Fortschritte zu erzielen, wird man das Wasser verlassen und an seiner Stelle eine geeignetere Arbeitsflüssigkeit wählen müssen. Bei den Heißluftmaschinen ist dies bereits geschehen. Heute haften diesen indessen noch so viele Nachteile an, daß sie noch weit davon entfernt sind, die Wasserdampfmaschinen in den Hintergrund zu drängen. Wahrscheinlich ist der Motor der Zukunft eine Dampfmaschine mit

Dämpfen einer Flüssigkeit, die bei etwa 400—500° C. eine Dampfspannung von nicht über 20 Atmosphären haben.

Aufg. 106. Wieviel Prozent der zugeführten Wärme vermag eine zwischen 140° C. und 35° C. arbeitende Kondensationsdampfmaschine höchstens in Arbeit zu verwandeln? Wieviel wenn der frische Dampf 8 Atmosphären hat?

Aufg. 107. Wieviel kgr Eis kann eine Kaltdampfmaschine von 30 Pferdekräften in der Stunde höchstens liefern, wenn die Temperatur des Kühlwassers 30° C. beträgt?

Anl. z. L. Die Verwandlung der mechanischen Arbeit in Wärme von der absoluten Temperatur 30 + 273 ist die positive, der Übergang von Wärme aus dem gefrierenden Wasser in das Kühlwasser die negative Verwandlung. Man setze beide Verwandlungswerte einander gleich.

Aufg. 108. Welches sind die Gründe, aus denen die Leistung der Kaltdampfmaschine in Wirklichkeit geringer ist und welche Bedingungen sind zu erfüllen, um eine möglichst große Leistung zu erzielen?

157. Die Entropie. Um den zweiten Hauptsatz auch für den Fall aussprechen zu können, daß kein vollständiger Kreisprozeß vorliegt, hat Clausius den Begriff der Entropie eingeführt. Man versteht darunter eine Größe, welche der Masse eines Körpers proportional und von dem Wärmezustande desselben abhängig ist. Sie ändert ihren Wert nicht, so lange dem Körper keine Wärme von außen zugeführt oder entzogen wird. Wird dem Körper die Wärme Q bei der Temperatur T zugeführt, so steigt die Entropie um den Betrag $\frac{Q}{T}$, d. h. um soviel als der Verwandlungswert beträgt, wenn die zugeführte Wärme durch Umwandlung aus mechanischer Arbeit hervorgeht.

Diese Begriffsbestimmung würde genügen die Entropie eines Körpers vollständig zu berechnen, wenn sie für irgend einen Normalzustand des Körpers bekannt wäre. Dafür fehlt indessen jeder Anhaltspunkt und man kann daher die Entropie immer nur als ein Binom angeben, von dem das eine Glied unbekannt ist und die Entropie in irgend einem bestimmt bezeichneten Normalzustande angiebt. Für die Anwendungen in der Energetik bringt diese Unbestimmtheit in dem wahren Werte der Entropie indessen keinen Nachteil mit sich.

Geht die Wärme Q von einem wärmeren Körper von der Temperatur T_1 auf einen kälteren von der Temperatur T_2 so über, so nimmt die Entropie des ersten um $\frac{Q}{T_1}$ ab und diejenige des zweiten steigt um $\frac{Q}{T_2}$. Die Summe der Entropieen beider Körper wächst daher um

$$\frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1},$$

d. h. um den Verwandlungswert jenes Wärmeüberganges.

Mit Hilfe des Begriffes der Entropie läßt sich nun der zweite Hauptsatz in der Form aussprechen:

Bei jeder beliebigen Reihe von Zustandsänderungen ist die algebraische Summe der Entropieänderungen von allen dabei beteiligten Körpern entweder positiv oder im Grenzfalle gleich Null.

158. Umkehrbare Zustandsänderungen. Die Zustandsänderungen des in § 127 beschriebenen Kreisprozesses (Fig. 23) können ebensowohl im einen als im anderen Sinne durchlaufen werden (vgl. § 129). Sie sind umkehrbare Zustandsänderungen und der aus ihnen zusammengesetzte Kreisprozeß heißt ebenfalls ein umkehrbarer Kreisprozeß.

Nach dem zweiten Hauptsatze können nur solche Kreisprozesse oder einzelne Zustandsänderungen umkehrbar sein, für welche die algebraische Summe der Entropieänderungen gleich Null ist. Wäre die Summe nämlich positiv, so würde sie beim umgekehrten Verlaufe negativ werden und das ist nach dem zweiten Hauptsatze nicht möglich.

So ist z. B. der unmittelbare Übergang von Wärme zwischen Körpern von verschiedener Temperatur nicht umkehrbar.

In Wirklichkeit giebt es eigentlich gar keine Zustandsänderungen, die in aller Strenge umkehrbar wären. Bei dem Kreisprozesse in § 127 z. B. muß bei der isothermischen Ausdehnung AB der die Wärme an das Gas abgebende Körper eine etwas höhere Temperatur haben als T_1, damit die Wärme überhaupt übergeht. Es tritt also notwendig eine Entropiezunahme ein. In der That läßt sich auch der Kreisprozeß der Fig. 23 nicht

ganz genau unter denselben Bedingungen rückwärts ausführen, wie in § 129 gesagt war. Vielmehr muß in diesem Falle der mit dem Gase während der Zustandsänderung BA in Berührung stehende Körper umgekehrt eine etwas (wenn auch wenig) niedrigere Temperatur besitzen als T_1. Die Bedingungen müssen also stets etwas abgeändert werden, wenn man eine gewisse Reihenfolge von Zustandsänderungen wirklich rückgängig machen will. Sofern dies nur in geringem Maße erforderlich ist, kann man von einem nahezu umkehrbaren Prozesse reden.

Ein umkehrbarer Prozeß ist dann ein solcher, dem man sich zwar mehr oder weniger nähern kann, ohne ihn indessen vollständig in der Natur verwirklichen zu können. Ein Beispiel hierfür bildet jede einfache Maschine, an der sich die Kräfte P und Q Gleichgewicht halten. Wäre gar keine Reibung vorhanden, so könnte man ebensowohl P durch Q, als Q durch P überwinden. Der Vorgang wäre genau umkehrbar. Er ist es in Wirklichkeit angenähert, wenn die Reibung nur geringen Einfluß hat.

Wenn man in der Energetik umkehrbare Zustandsänderungen betrachtet, so geschieht dies in demselben Sinne, als wenn man bei der Behandlung der Maschine zunächst die Reibungen vernachlässigt.

159. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich in Verbindung mit § 155, daß man bei einer calorischen Maschine nur umkehrbare (oder vielmehr nahezu umkehrbare) Zustandsänderungen verwenden soll. Man erhält so eine vollkommene calorische Maschine. Alle calorischen Maschinen, mit welcher Arbeitsflüssigkeit sie auch arbeiten mögen, verwandeln, wenn sie zwischen denselben Grenztemperaturen betrieben werden, den gleichen Bruchteil der zugeführten Wärme in mechanische Arbeit um.

Anm. Auf die weiteren Anwendungen des zweiten Hauptsatzes, welche die Hilfsmittel der höheren Mathematik erfordern, kann in einem elementaren Lehrbuche der Mechanik nicht eingegangen werden.

Vierter Abschnitt.

Elektromechanik.

Erstes Kapitel.

Die Elektrizität in Ruhe.

160. Man kennt bis jetzt nicht genau die Art und Weise, wie die elektrischen Erscheinungen zu stande kommen, d. h. was die Elektrizität ihrem Wesen nach ist. Um eine Elektromechanik aufstellen zu können, muß man darüber eine bestimmte Annahme machen. Man hat bisher mehrere Annahmen dieser Art gemacht, ohne indessen alle elektrischen Erscheinungen damit befriedigend erklären zu können.

Hier werden wir uns an eine ganz bestimmte Vorstellung über das Wesen der Elektrizität halten, aus welcher sich die technisch wichtigsten Erscheinungen ableiten lassen. Man darf freilich nicht erwarten, daß diese Vorstellung in allen Stücken dem wahren Sachverhalte, wie er später einmal von der physikalischen Forschung festgestellt werden wird, entspreche; doch läßt sich annehmen, daß sie der Wahrheit schon ziemlich nahe kommt.

Um unser Wissen über die Elektrizität steht es ähnlich wie vor einigen Jahrhunderten um das Wissen über die Materie. Obschon die Körper unmittelbar auf unsere Sinne einwirken, hat es der Arbeit der größten Denker bedurft, um diejenige Vorstellung von denselben zu gewinnen, welche die Grundlage unserer heutigen Mechanik bildet. Man kann sagen, daß die reine Mechanik sich auf eine Körperwelt bezieht, die wir uns vorstellen und der wir gewisse Eigenschaften beigelegt haben, aus denen sich das mechanische Verhalten als eine notwendige Folgerung ergiebt. Erst die Erfahrung zeigt, daß die weitgehendste Übereinstimmung zwischen der Wirklichkeit und unserer Auffassung derselben besteht.

So kann auch die Elektromechanik nur als die Lehre von dem Gleichgewichte und der Bewegung einer gedachten und von uns mit gewissen Eigenschaften belegten Elektrizität aufgefaßt werden. Es wird erst noch weiterer Fortschritte bedürfen um den Begriff, den wir von der Elektrizität uns gebildet haben, so zu ergänzen oder zu verbessern, daß er sich ebenso scharf an das wahre Verhalten in der Natur anschließt, als unser heutiger Begriff der Materie.

Auch in ihrer heutigen unvollkommenen Fassung bietet uns aber die Elektromechanik ein unersetzliches Hilfsmittel für das Verständnis elektrischer Vorgänge.

161. Unter Elektrizität verstehen wir hier einen Stoff, dem wir folgende Eigenschaften beilegen:

1) Elektrizität ist in allen Körpern in gewisser, bisher unbekannter Menge vorhanden. In manchen Körpern kann sie sich frei verschieben, wobei nur ein Reibungswiderstand auftritt, dessen Größe proportional der Geschwindigkeit der Strömung ist; diese Körper heißen Leiter. In anderen kann sie nicht strömen, sondern sich nur unter Überwindung eines elastischen Widerstandes etwas verschieben, so daß sie nach Aufhören der verschiebenden Kraft in ihre frühere Lage zurückgeht; diese Körper heißen Nichtleiter (Isolatoren) oder auch dielektrische Körper.

2) Im gewöhnlichen Zustande enthält jeder Körper in jedem gr eine gewisse, von seiner chemischen Beschaffenheit abhängige Elektrizitätsmenge; er heißt dann elektrisch neutral oder unelektrisch. Ein Körper, der mehr Elektrizität enthält, heißt positiv, im entgegengesetzten Falle negativ geladen. Der Überschuß der Elektrizitätsmenge über die dem unelektrischen Zustande entsprechende heißt die freie Elektrizität oder freie Ladung des Körpers; eine negative freie Ladung ist die dem Körper gegenüber dem unelektrischen Zustande entzogene Elektrizitätsmenge. Die höchste freie Ladung, welche wir z. B. mit Hilfe der Elektrisiermaschine hervorbringen können, entspricht nur einem kleinen Bruchteile der neutralen Menge.

3) Auch der luftleere Raum enthält neutrale Elektrizität; diese ist nichts anderes als der Äther, dessen Schwingungen das Licht ausmachen; der luftleere Raum (das Vacuum) ist ein vollkommener Nichtleiter.

4) Wir betrachten die Elektrizität als einen Stoff von sehr geringer Trägheit, an dem Kräfte zu wirken vermögen, die sich in denselben Einheiten messen und in jeder Hinsicht mit den Kräften vergleichen lassen, die an den wägbaren Körpern angreifen. Insbesondere nehmen wir an, daß der Satz vom Parallelogramm der Kräfte und die daraus abgeleiteten Hauptlehrsätze, ebenso der Satz

von der Gleichheit der Aktion und Reaktion für die an der Elektrizität wirkenden Kräfte giltig sind. Ob die Elektrizität schwer ist, d. h. von der Erde angezogen wird, kann hier unentschieden gelassen werden. Jedenfalls ist die etwaige Schwere der Elektrizität so gering, daß sie in keinem Falle in Betracht gezogen zu werden braucht.

5) Die lebendige Kraft strömender Elektrizität ist (wegen der geringen Masse der letzteren) so gering, daß sie bisher nicht gemessen werden konnte. Nur aus den Berechnungen über die Lichtbewegung des Äthers hat man eine ungefähre Schätzung derselben ableiten können, aus welcher ebenso wie aus den Versuchen zur unmittelbaren Messung der lebendigen Kraft des elektrischen Stromes hervorgeht, daß die in 1 ^{ccm} enthaltene Elektrizitätsmenge eine unvergleichlich viel geringere Masse besitzen muß, als ein gleich großes Volumen eines wägbaren Körpers.

6) Die gewöhnliche Mechanik betrachtet Körper, welche die neutrale Elektrizitätsmenge besitzen und in denen diese sich in Ruhe befindet. Als elektrische Erscheinungen sind daher nur diejenigen anzusehen, welche hervorgerufen werden durch freie Ladungen oder durch Strömungen oder Verschiebungen der neutralen Elektrizitätsmenge in den Körpern. Elektrische Kräfte heißen die infolge dieser Abänderung gegenüber dem gewöhnlichen Zustande auftretenden Kräfte. Wir nehmen an, daß alle elektrischen Kräfte zunächst auf die in den Körpern enthaltene (neutrale und freie) Elektrizitätsmenge wirken und daß sie von dieser auf den ganzen Körper übergehen, wenn die Elektrizität verhindert ist, dem Antriebe allein zu folgen.

162. Elektrostatische Kräfte. Die Erfahrung lehrt, daß zwei gleichnamig geladene Körper sich abstoßen, zwei ungleichnamige sich anziehen. Die Größe der dabei auftretenden Kraft wird durch das Gesetz von Coulomb (geb. 1736, gest. 1806) angegeben. Bezeichnet man die freien Ladungen mit e und e', ihre Entfernung mit r und mit K einen aus der Erfahrung abzuleitenden Coeffizienten, so ist die elektrostatische Kraft P hiernach

$$P = K\frac{ee'}{r^2}.$$

Ein positives Vorzeichen von P giebt eine Abstoßung an.

Zur Berechnung der Kraft P nach der vorstehenden Formel muß man die Elektrizitätsmengen e und e' messen können. Man kann aber auch umgekehrt, wenn die Größe von P beobachtet ist, auf die Größen von e und e' schließen.

163. Mechanische Einheit der Elektrizitätsmenge. Um Elektrizitätsmengen zu messen, muß man zunächst die Einheit festsetzen, in der man alle übrigen Mengen ausdrücken will. In der Elektromechanik sind indessen zwei verschiedene Einheiten im Gebrauch, von denen die eine, die magnetische Einheit, nahezu 30 000 Millionen mal größer ist als die andere, die mechanische Einheit. Zur letzteren gelangt man durch folgende Definition.

Die mechanische Einheit der Elektrizitätsmenge ist diejenige, welche im freien Zustande auf eine ihr gleiche im Abstande gleich der Längeneinheit eine Abstoßung ausübt, die gleich der Krafteinheit ist. Vorausgesetzt wird dabei, daß sich zwischen den beiden Elektrizitätsmengen Luft (oder streng genommen ein luftleerer Raum) befindet.

164. Die Wahl der soeben definierten Einheit hat den Vorteil, daß der Coeffizient K in der Coulomb'schen Formel (§ 162) für Luft den Wert 1 annimmt. Er behält diesen Wert indessen nicht, wenn sich die Elektrizitätsmengen in einem anderen dielektrischen Körper (z. B. in Petroleum) gegenüberstehen. Er ist dann stets größer als 1, hängt von der Art dieses Körpers ab und heißt die Dielektrizitätskonstante des letzteren.

Wenn indessen auch (bei der Wahl der mechanischen Einheit der Elektrizität) für den luftleeren Raum und näherungsweise in irgend einem Gase K den Zahlenwert 1 annimmt, so ist damit noch nicht gesagt, daß K als Faktor aus der Coulomb'schen Formel völlig verschwindet. Die Größe K ist nämlich kein gewöhnlicher Zahlenfaktor, sondern eine Größe, der eine gewisse Dimension zugeschrieben werden muß (§ 31). Vorläufig ist diese Dimension unbekannt; es liegt dies an der Unfertigkeit unserer heutigen Elektromechanik.

Wäre die Dimension von K bekannt, so ließe sich aus der Coulomb'schen Formel jene von e ermitteln und umgekehrt. Um über diese Schwierigkeit hinwegzukommen und wenigstens zu einem

vorläufigen Resultate zu gelangen, hat man willkürlich die Dimension von K gleich Null gesetzt, bei gleichzeitiger Annahme der mechanischen Elektrizitätseinheit also den Faktor K aus der Coulomb'schen Formel völlig gestrichen und sie

$$P = \frac{ee'}{r^2}$$

geschrieben. Das auf diese willkürliche Annahme gegründete Maßsystem elektrischer Größen heißt das elektrostatische Maßsystem. Es wird heute stets in Verbindung mit dem absoluten Maßsysteme gebraucht, bei welchem 1 cm die Einheit der Länge, 1 Sek. die Zeiteinheit und 1 gr die Masseneinheit ist. Ihm entspricht 1 Dyn als Krafteinheit, nämlich jene Kraft, welche 1 gr Masse die Beschleunigung von 1 cm pro Sekunde erteilt.

Aufg. 109. Welche Dimension ist der Elektrizitätsmenge im elektrostatischen Systeme zuzuschreiben? Warum darf dieselbe aber nicht mit der wahren Dimension verwechselt werden?

Aufg. 110. Zwei elektrisch geladene Kügelchen von je 0,3 gr Gewicht sind an Fäden aufgehängt, die sich infolge der elektrischen Abstoßung um 8° gegen die senkrechte Richtung schräg stellen. Wie groß ist die freie Ladung, welche bei beiden gleich groß sein soll, wenn der Abstand 6 cm beträgt?

165. Das Potential. Ein elektrisch geladener Körper sei isoliert aufgestellt; ihm möge ein kleines Körperchen oder ein mat. P. aus sehr großer Entfernung allmählich genähert werden, auf dem sich eine freie Ladung befindet, die gleich der positiven elektrostatischen Einheit ist. Die elektrische Kraft, welche auf den geladenen mat. P. ausgeübt wird, nimmt erst eine merkliche Größe an, wenn derselbe mehr in die Nähe jenes Körpers gelangt. Man nennt jenen Umkreis des geladenen Körpers das elektrische Feld desselben. Das elektrische Feld ist um so weiter reichend zu denken, je feinere Hilfsmittel wir für die Wahrnehmung sehr kleiner Kräfte besitzen.

Ist der Körper selbst positiv geladen, so wirkt an dem elektrisch geladenen mat. P. eine Abstoßung und wir müssen zur Überwindung derselben eine Arbeit aufwenden, um ihn jenem Körper zu nähern. Die Arbeit, welche im ganzen erforderlich ist, um den mat. P.

von außerhalb nach einem bestimmten Punkte des elektrischen Feldes hinzuführen, heißt das **Potential** des letztgenannten Punktes.

166. Lehrsatz. Das **Potential ist unabhängig von dem Wege, auf dem man den geladenen mat. P. von außerhalb her nach dem betreffenden Punkte des elektrischen Feldes hinführt.**

Anl. z. Bew. Man betrachte zwei verschiedene Wege, die beide von einem Punkte außerhalb des elektrischen Feldes nach einem Punkte innerhalb desselben hinführen. Wäre für den ersten das Potential kleiner als für den zweiten, so könnte man den geladenen mat. P. auf dem ersten Wege hin- und auf dem zweiten zurückführen; man würde dann auf dem Rückwege mehr Arbeit gewinnen, als auf dem Hinwege verbraucht wurde. Diese Arbeit wäre aber ohne Aufwand irgend einer anderen Form von Energie gewonnen, was gegen den ersten Hauptsatz verstößt.

167. Niveauflächen. Die Punkte, welche im elektrischen Felde eines geladenen Körpers gleiches Potential besitzen, kann man sich durch Linien und Flächen mit einander verbunden denken. Die letzteren heißen Flächen gleichen Potentials oder äquipotentielle Flächen oder auch **Niveauflächen**. Das elektrische Feld hat unendlich viele, stetig aufeinander folgende Niveauflächen, so daß durch jeden Punkt desselben eine und nur diese eine Niveaufläche geht (§ 166).

Von allen Niveauflächen können wir uns einige konstruiert denken, so daß sich das Potential von jeder zur folgenden um gleich viel ändert. Nach der Definition des Potentials liegen diese Niveauflächen um so dichter beisammen, je größer an der betreffenden Stelle die elektrische Kraft ist (§ 165). Die letztere ist umgekehrt proportional dem Abstande zweier benachbarter Niveauflächen. (Bew.!)

168. Verschiebt man einen elektrisch geladenen mat. P. längs einer Niveaufläche, so ist die Arbeitsleistung der elektrischen Kraft gleich Null (wie aus § 166 folgt); da aber die letztere selbst nicht gleich Null ist, so folgt, daß die Verschiebungsrichtung senkrecht zur Kraftrichtung steht. Daraus geht hervor, daß die Richtung der elektrischen Kraft im elektrischen Felde überall senkrecht zu den Niveauflächen steht.

169. Lehrsatz. Ist der elektrisch geladene Körper, welcher das elektrische Feld hervorbringt, ein Leiter, so ist im Gleichgewichtsfalle seine Oberfläche selbst eine Niveaufläche.

Anl. z. Bew. Hätten zwei benachbarte Punkte des Leiters verschiedenes Potential, so müßte eine elektrische Kraft auftreten, welche die Elektrizität von dem Punkte höheren zu demjenigen niederen Potentials hinführte. Da der Leiter einer solchen Bewegung kein Hindernis entgegensetzt, könnte demnach kein Gleichgewicht bestehen.

Zusatz. Im Gleichgewichtsfalle hat das Potential im Innern eines Leiters stets denselben Wert wie auf der Oberfläche.

Unter dem Potentiale eines Leiters versteht man den Wert, welchen das Potential im Innern und auf der Oberfläche desselben annimmt. Bei Nichtleitern oder bei Leitern, in denen die Elektrizität strömt, kann nicht von dem Potentiale des ganzen Körpers, sondern nur von dem Potentiale einzelner Teile desselben gesprochen werden.

170. Die vorigen Betrachtungen gelten unverändert, wenn das elektrische Feld durch mehrere elektrisch geladene Körper hervorgebracht wird. Auf jedem Leiter, der sich im elektrischen Felde befindet, hat das Potential an allen Stellen denselben Wert, der aber im allgemeinen für jeden einzelnen Leiter verschieden groß ist.

Aufg. 111. Welche Dimension hat das Potential im elektrostatischen Maßsysteme?

Anl. z. L. Die Arbeit, welche man aufwenden muß, um eine elektrische Ladung von e Einheiten auf einem Wege zu verschieben, auf dem das Potential um V Einheiten anwächst, ist nach § 165 gleich eV. Da die Dimension der Arbeit und diejenige von e bekannt ist (Aufg. 109), ergiebt sich hieraus die von V.

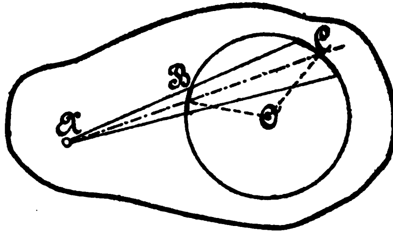
Aufg. 112. Was mißt man mit Hilfe des Elektrometers? Erkläre die Wirkungsweise desselben!

171. Lehrsatz. Die elektrische Ladung eines Leiters ist im Gleichgewichtsfalle ausschließlich über die Oberfläche verteilt.

Anl. z. Bew. Man denke sich im Innern des Leiters eine

beliebige geschlossene Fläche, z. B. eine Kugelfläche gezogen; zu beweisen ist, daß sich innerhalb derselben keine freie Elektrizität befinden kann. Von dem Punkte A (Fig. 28), in dem sich ein Teil der freien Ladung e befinden möge, ziehen wir die Sekante AC. Die elektrische Kraft, welche von e herrührt, ist für die elektrische Einheit im Punkte B gleich $\frac{e}{AB^2}$ und im Punkte C gleich $\frac{e}{AC^2}$. Die Komponente derselben normal zur Kugelfläche ergiebt sich daraus durch Multiplikation mit dem Cosinus von $\sphericalangle OBC$ bezw. $\sphericalangle OCB$. Wir denken uns ferner ein den Punkt B enthaltendes kleines Flächenstück f auf der Kugelfläche abgegrenzt und durch den Umfang desselben von A aus eine Kegelfläche gelegt, welche bei C das Flächenstück F ausschneidet. Bezeichnet man die Projektionen von f und F auf eine Normalebene der Sekante mit f' und F', so ist

Fig. 28.



$$\frac{F'}{f'} = \frac{AC^2}{AB^2}; \quad F' = F \cos \sphericalangle OCB; \quad f' = f \cos \sphericalangle OBC$$

und daher

$$f \cdot \frac{e}{AB^2} \cos \sphericalangle OBC = F \cdot \frac{e}{AC^2} \cos \sphericalangle OCB,$$

d. h. das Produkt aus der Normalkomponente der von e herrührenden elektrischen Kraft und dem zugehörigen Flächenstücke ist in beiden Fällen von gleicher Größe. In dem einen Falle ist aber der Pfeil der Normalkomponente ins Kugelinnere hinein, im anderen Falle nach außen gerichtet. Rechnet man die Normalkomponente N im ersten Falle positiv, im zweiten negativ, so ist daher

$$\sum Nf = 0,$$

wenn die algebraische Summierung über alle Flächenteile f und F der Kugelfläche ausgedehnt wird.

Dasselbe gilt von allen elektrischen Kräften, welche von Ladungen herrühren, die außerhalb der Kugelfläche liegen; für positive Ladungen, die innerhalb der Kugelfläche liegen, ist dagegen die Normalkomponente der elektrischen Kraft überall nach außen gerichtet, d. h. negativ. Die infolge der gesamten Ladung zustande kommende Normalkomponente ist aber gleich der algebraischen Summe der von den einzelnen Teilen der Ladung herrührenden Komponenten (§ 161, 4). Der Wert ΣNf muß daher, wenn positive Ladungen innerhalb der Kugelfläche liegen sollen, notwendig negativ sein. Im Gleichgewichtsfalle muß aber für einen Leiter die elektrische Kraft und daher N überall den Wert Null annehmen, woraus der Satz folgt. (Der Beweis gilt übrigens unverändert für jede beliebige geschlossene Fläche an Stelle der Kugel.)

Durch sehr sorgfältige Versuche hat man die Giltigkeit des Satzes geprüft und damit bewiesen, daß die Annahmen, aus denen er abgeleitet ist (das Coulomb'sche Gesetz und die Giltigkeit der Sätze der gewöhnlichen Mechanik für elektrische Kräfte) zuverlässig sind.

Die Aussprache des Lehrsatzes bedarf noch einer Ergänzung. Wir denken uns die Elektrizität als einen den Raum ausfüllenden Stoff, welcher in dieser Hinsicht eine gewisse Ähnlichkeit mit der Materie besitzt. In der That läßt sich nur durch diese Vorstellung die Anwendung der Lehrsätze der Mechanik auf die an der Elektrizität wirkenden Kräfte rechtfertigen. Damit scheint nun der Lehrsatz im Widerspruche zu stehen, da nach ihm die elektrische Ladung auf das Volumen Null an der Oberfläche zusammengedrängt sein müßte.

Der Satz ist aber in dem Sinne aufzufassen, daß sich die elektrische Ladung auf eine sehr dünne Oberflächenschicht zusammendrängt. Reicht nämlich die Oberfläche der Kugel (Fig. 28) in die äußersten Oberflächenschichten hinein, so können neben den auf größere Entfernung hin wirksamen Kräften, welche durch das Coulomb'sche Gesetz dargestellt werden, noch andere Kräfte auftreten, welche sich nur auf kleinste Entfernungen hin äußern und sich dem weiteren Zusammendrängen der elektrischen Ladung widersetzen. Auf Grund dieser Annahme hat der Verfasser (in Wiede-

mann's Annalen Bd. 29 und 31) die wahrscheinliche Dicke der elektrischen Schicht zu etwa $1/_{1000}$ cm berechnet. — Nach einer anderen Ansicht (von Maxwell) wird die Ladung aus dem Leiter heraus und in die der Oberfläche anhaftende Luftschicht bezw. in den den Leiter umgebenden Isolator hinein getrieben.

172. Lehrsatz. Die elektrischen Kräfte, welche von der Ladung einer isoliert und fern von anderen Leitern aufgestellten leitenden Kugel auf außerhalb gelegene Punkte ausgeübt werden, sind so groß, als wenn die Ladung im Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre.

Anl. z. Bew. Man denke sich um einen elektrisch geladenen Punkt eine Kugelfläche gelegt. Der in § 171 betrachtete Wert ΣNf ist dann gleich $-4\pi e$, also unabhängig vom Radius. Aus einer solchen Kugel kann man aber jeden anders gestalteten Raum dadurch ableiten, daß man vollständig abgegrenzte Räume hinzufügt, für welche die Ladung e außerhalb liegt und daher (§ 171) $\Sigma Nf = 0$ ist. Daraus folgt, daß für jede geschlossene Fläche, welche Ladungen e in ihrem Innern enthält, $\Sigma Nf = -4\pi \Sigma e$ ist. Man betrachte nun eine gleichmäßig mit Elektrizität belegte Kugelfläche, deren Gesamtladung E ist und umschließe sie durch eine konzentrische Kugelfläche, für welche man den Wert ΣNf bildet. Nach dem Vorstehenden ist derselbe gleich $-4\pi E$. Dieser Wert ändert sich aber nicht, wenn die innere Kugelfläche sich allmählich auf einen kleineren Radius zusammenzieht, ohne daß sich die Gesamtladung ändert. Der vollständigen Symmetrie wegen hat N an allen Stellen der äußeren Kugelfläche denselben Wert und stellt selbst die elektrische Kraft dar. Daraus folgt, daß die elektrische Kraft an jeder Stelle des äußeren Raumes ungeändert bleibt, wenn die geladene Kugeloberfläche sich immer mehr zusammenzieht, so lange, bis zuletzt die Ladung im Mittelpunkte konzentriert ist.

Aufg. 113. Auf einer Kugelfläche von 2 cm Radius befindet sich eine positive Ladung von 30 mechanischen Einheiten. Zeichne die Niveauflächen für die Potentialwerte 1, 2, 3 .... 7, 7,5.

173. Kapazität. Erteilt man zwei isolierten Leitern, die vorher unelektrisch waren, gleich große Ladungen, so nehmen sie

im allgemeinen Potentiale von verschiedener Größe an. Verursachen dagegen gleiche Ladungen gleiche Potentiale, so sagt man, beide Leiter haben gleiche Kapazität. Zwei kugelförmige Leiter von gleicher Größe haben stets gleiche Kapazität, wenn sie auch aus verschiedenen Metallen angefertigt sind. Die Kapazität hängt nur von der geometrischen Gestalt und nicht von der stofflichen Natur der Leiter ab. Ein Leiter, welcher das Potential 1 annimmt, wenn ihm die elektrische Einheit mitgeteilt wird, besitzt die Einheit der Kapazität.

Heißt das Potential V, die Ladung E und die Kapazität C, so ist demnach allgemein

$$E = C \cdot V.$$

174. Lehrsatz. Das Potential einer Kugel ist gleich dem Quotienten aus der Ladung durch den Radius.

Anl. z. Bew. Eine geladene Kugel vom Radius r möge sich zusammenziehen auf r_1, ohne daß sich die Ladung E ändert. Im Abstande r bleibt dann das Potential V auf dem früheren Werte (§ 172); von da bis zu r_1 steigt es auf V_1 an, so daß $V_1 - V$ gleich der Arbeitsleistung ist, die man aufwenden muß, um die elektrische Einheit auf der Strecke $r - r_1$ zu verschieben. Diese ist gleich $\frac{E}{r_m^2}(r - r_1)$, wenn r_m einen Mittelwert angiebt, für den man, wenn sich r_1 nur wenig von r unterscheidet, das geometrische Mittel beider setzen kann. Damit wird

$$V_1 - V = \frac{E(r - r_1)}{r r_1} = \frac{E}{r_1} - \frac{E}{r}.$$

Der Wert $V = \frac{E}{r}$ hat demnach die in der Definition des Potentials angegebene Eigenschaft.

Zusatz 1. Die Kapazität einer Kugel ist gleich dem Radius derselben. (Folgt aus § 173.)

Zusatz 2. Das Potential, welches an irgend einer Stelle von verschiedenen, beliebig verteilten Elektrizitätsmengen e hervorgerufen wird, die von dem betrachteten Punkte die Abstände r haben, ist

$$V = \sum \frac{e}{r}.$$

(Folgt aus § 172.)

175. Influenz. Die nach dem Coulomb'schen Gesetze wirkenden elektrischen Kräfte greifen nicht nur an freien Ladungen an, sondern auch an der neutralen Elektrizität, welche sich überall ringsum (auch im luftleeren Raume) befindet.

Man denke sich zunächst einen mat. P., der mit der freien Elektrizitätsmenge e geladen und ringsum von Luft (oder einem anderen Dielektrikum) umgeben ist. In irgend einem Raumteilchen des letzteren befinde sich die neutrale Elektrizitätsmenge m. Durch die Anwesenheit von e tritt dann zu den vorher schon vorhandenen Kräften eine abstoßende Kraft zwischen e und m_1 auf, die gleich $\frac{em}{r^2}$ ist. An e halten sich die von allen Seiten in gleicher Größe auftretenden abstoßenden Kräfte im Gleichgewichte. Die neutrale Elektrizitätsmenge m erfährt dagegen eine geringe elastische Verschiebung im Dielektrikum. Im ganzen elektrischen Felde treten solche Verschiebungen auf, die die neutrale Elektrizität in einen sog. Zwangszustand versetzen.

Befindet sich dagegen neben e irgendwo noch ein Überschuß e_1 über die neutrale Menge, so wird die in der Richtung der Verbindungslinie wirkende Kraft $\frac{e(m+e_1)}{r^2}$ um den Betrag $\frac{ee_1}{r^2}$ größer als vorher und die an e wirkenden Kräfte halten sich nicht mehr im Gleichgewichte, sondern besitzen die Resultierende $\frac{ee_1}{r^2}$, welche nun der Beobachtung zugänglich ist. Ist dagegen e_1 negativ, so ist die in der Verbindungsrichtung auftretende abstoßende Kraft $\frac{e(e-m_1)}{r^2}$ um den Betrag $\frac{ee_1}{r^2}$ zu klein, um mit den von allen anderen Seiten auftretenden abstoßenden Kräften Gleichgewicht halten zu können und an e wirkt als Resultierende eine anziehende Kraft von dieser Größe.

Ist endlich e selbst negativ, so geht von dem Sitze desselben eine geringere Abstoßung nach allen Seiten hin aus, als wenn $e = 0$ wäre. Im Dielektrikum erfolgen elastische Verschiebungen nach e zu; der mit $-e$ geladene mat. P. bleibt dagegen im Gleichgewichte, weil von allen Seiten gleich große anziehende Kräfte auf ihn einwirken. Anders ist es, wenn außerdem noch irgendwo eine

positive Ladung e_1 angebracht wird. Die gegenüber dem neutralen Zustande verminderte Abstoßung, d. h. die scheinbare Anziehung, wird dann in der Richtung der Verbindungslinie vergrößert und an e wirkt (ebenso wie an e_1) eine anziehende Kraft als Resultierende. Umgekehrt ist es, wenn auch e_1 negativ ist. Damit erklärt sich die Abstoßung negativer freier Ladungen.

Anm. Die eben erläuterte Betrachtung, welche die an freien Ladungen auftretenden Kräfte unter Berücksichtigung des „Auftriebes" der ringsum befindlichen neutralen Elektrizität erklärt, rührt von Edlund her und beseitigt eine Schwierigkeit, welche früher der Annahme einer einzigen Elektrizitätsart entgegenstand. Um sie zu umgehen nahm man an, daß die neutrale Elektrizität aus einer Mischung von zwei in ihren Eigenschaften entgegengesetzten Elektrizitätsarten (der positiven und negativen Elektrizität) bestehe. Heute ist diese im Widerspruche mit der überall in der Natur beobachteten Einfachheit im Aufbaue und der Wirkungsweise der Körper stehende Ansicht allgemein aufgegeben; sie findet sich nur noch in einigen Lehrbüchern, die dem Herkommen zuliebe an einer Anschauung festhalten, die dem klaren Auffassen der elektrischen Erscheinungen erhebliche Schwierigkeiten in den Weg legt. Positive und negative Elektrizität stehen sich nicht anders gegenüber, als wie Wärme und Kälte oder Licht und Schatten.

176. Befindet sich in der Nachbarschaft des mit e geladenen mat. P. ein Leiter, so ändert sich die Betrachtung des vorigen Paragraphen. Infolge der in demselben auftretenden elektrischen Kräfte verschiebt sich das in ihm frei bewegliche neutrale Fluidum, so daß an einigen Stellen des Leiters positive, an anderen negative freie Ladungen auftreten, wenn er vorher elektrisch neutral war. Man sagt dann, der Leiter ist durch Influenz elektrisiert.

Diese Bewegungen hören nicht eher auf, als bis das Potential überall auf dem Leiter denselben Wert angenommen hat. Man erkennt daraus, daß das Potential eines Leiters nicht nur von den auf ihm befindlichen Ladungen, sondern auch von den in der Nähe befindlichen freien Elektrizitäten abhängt.

Aufg. 114. Erkläre die elektrischen Erscheinungen beim Elektrophor, bei der Influenzelektrisiermaschine, beim Kollektor!

Aufg. 115. Wie groß ist die mechanische Arbeit, welche geleistet werden muß, um die in Aufg. 113 erwähnte Ladung hervorzubringen?

Anl. z. L. Das Potential der Kugel ergiebt sich aus § 174. Während der Ladung steigt es von Null an bis auf diesen Endwert und ist in jedem

Augenblicke der vorhandenen Ladung proportional. Der Mittelwert desselben während der Ladung ist daher gleich der Hälfte des Endwertes. Durch Multiplikation mit der Ladung ergiebt sich daraus die gesuchte Arbeit.

Aufg. 116. Wievielmal kann eine durch eine Pferdekraft betriebene Elektrisiermaschine die in Aufg. 113 erwähnte Ladung in der Sekunde höchstens hervorbringen?

177. Der Kondensator. Zwei konzentrische leitende Kugelflächen von den Radien r und r_1 mögen den Abstand a besitzen, so daß $a = r - r_1$ ist. Die innere möge mit der Elektrizitätsmenge E positiv geladen sein, während die äußere eine ebenso große negative Ladung besitzen soll. Nach außen hin heben sich die elektrischen Kräfte beider Ladungen genau auf (§ 172). Das Potential der äußeren Kugelfläche ist daher gleich Null; sie kann durch einen dünnen Draht mit der Erde leitend verbunden werden, ohne ihre Ladung zu verlieren. Wäre sie ursprünglich unelektrisch gewesen, so würde nach ihrer Verbindung mit der Erde so viel von ihrer neutralen Elektrizität zur Erde abgeflossen sein, bis ihr Potential auf Null gesunken wäre, d. h. bis sie die Ladung $-E$ angenommen hätte.

Das Potential der inneren Kugel ist gleich $a \frac{E}{r_m^2}$, wo r_m zwischen r und r_1 liegt. Ist r nur wenig von r_1 verschieden, so kann man dafür näherungsweise $a \frac{E}{r_1^2}$ schreiben.

Die Kapazität dieses Kondensators ist (§ 173) gleich $\frac{r_1^2}{a}$. Wäre die zur Erde abgeleitete äußere Kugelfläche nicht vorhanden, so wäre die Kapazität der inneren Kugel nur gleich r_1 (§ 174). Sie ist also durch die äußere Kugelfläche im Verhältnisse $r_1 : a$ vergrößert. Man kann daher vermittelst einer gegebenen Elektrizitätsquelle weit größere Mengen freier Elektrizität auf der inneren Kugel anhäufen, als es ohne das Hinzukommen der äußeren zur Erde abgeleiteten Hohlkugel (die man sich an einer Stelle durch einen dünnen isolierten Draht durchsetzt zu denken hat) geschehen könnte.

Aufg. 117. Welchen Ausdruck erhält man für die Kapazität des betrachteten Kondensators, wenn a nicht sehr klein im Vergleiche zu r_1 ist?

Anl. z. L. Das Potential auf der inneren Kugelfläche kann als eine Summe von zwei Potentialen aufgefaßt werden, die sich nach § 174 ergeben.

Aufg. 118. Wie groß muß r_1 sein, wenn $a = 0{,}2^{\text{mm}}$ ist und die Kapazität des Kondensators gleich derjenigen der ganzen Erdkugel sein soll?

178. Die vorstehenden Betrachtungen ändern sich etwas, wenn zwischen den beiden Belegungen des Kondensators nicht Luft oder ein leerer Raum, sondern ein anderer dielektrischer Körper, z. B. Glas, sich befindet.

Man kann sich das abweichende Verhalten dieser Körper auf zwei verschiedene Arten erklären, entweder nämlich durch die Annahme, daß der elektrische Elastizitätscoeffizient von verschiedener Größe ist (d. h. daß die elastische Verschiebung der neutralen Elektrizität bei gleicher Kraft in verschiedenen dielektrischen Körpern verschieden groß ist), oder durch die Annahme, daß sich im Innern dieser Körper einzelne, sehr kleine leitende Teilchen befinden, die beim Auftreten elektrischer Kräfte durch Influenz elektrisiert werden. In beiden Fällen gelangt man einmal zur Erklärung für die verschiedene Größe des Coeffizienten K in der Coulomb'schen Formel und dann zu dem Schlusse, daß sich an der Grenze von zwei dielektrischen Körpern (z. B. Glas und Luft) im elektrischen Felde eine freie Ladung ansammelt.

Um die Kapazität eines Kondensators zu berechnen, dessen Zwischenschicht z. B. aus Glas gebildet ist, genügt es daher nicht, so wie es oben geschehen ist, die Arbeit zu berechnen, welche aufgewendet werden muß, um die elektrische Einheit von der äußeren Belegung auf die innere zu bringen, sondern man muß dabei auf die an den Glasoberflächen selbst auftretenden freien Ladungen Rücksicht nehmen. Würde man diesen letzten Umstand vernachlässigen, so käme man zu dem Schlusse, daß die Kapazität der Dielektrizitätskonstante K umgekehrt proportional wäre. In Wirklichkeit ist aber, wie die genaue Rechnung zeigt, welche sich mit den Hilfsmitteln der Elementarmathematik nicht gut wiedergeben läßt, die Kapazität des Kondensators der Konstanten K vielmehr direkt proportional.

Aufg. 119. Um die Kapazität einer Leydener Flasche zu bestimmen, verbindet man die eine Belegung mit der Erde und ladet

die andere auf ein Potential V, das vermittelst eines Elektrometers gemessen werden kann. Hierauf verbindet man die geladene Belegung mit einer vorher unelektrischen Kugel vom Radius r durch einen dünnen Draht und beobachtet, daß das Potential auf V_1 gesunken ist. Wie groß ist die Kapazität des Kondensators?

Anl. z. L. C ergiebt sich durch Auflösen der Gleichungen $E = V \cdot C$; $e = V_1 \cdot r$; $E - e = V_1 \cdot C$.

Anm. Zur Ausführung der Bestimmung genügt ein Elektrometer, dessen Ausschläge proportional dem Potentiale der damit verbundenen Körper sind, ohne daß es nötig wäre, zu wissen, wie groß das Potential ist, welches einem Teilstriche entspricht (z. B. ein Quadrantenelektrometer). Man muß nur darauf achten, daß die Kapazität des Elektrometers selbst klein genug ist, um vernachlässigt werden zu können oder man muß im anderen Falle diese mit in Rechnung ziehen. (Wie kann dies geschehen?)

179. Berührungselektrizität. Zwei Leiter, die mit einander unmittelbar in Berührung stehen, nehmen nur dann dasselbe Potential an, wenn sie aus demselben Stoffe bestehen. Ein Stück Zink z. B., das mit einem Kupferstücke verbunden ist, nimmt ein positives Potential an, wenn das Potential des Kupfers gleich Null ist. Der Grund dafür liegt in der verschieden großen Anziehung, welche die Metalle auf das neutrale Fluidum ausüben.

An der Verbindungsstelle bildet sich infolge dessen in den Grenzschichten des Zinks eine positive, in denjenigen des Kupfers eine negative freie Ladung aus. Die Kraft, mit der das neutrale Fluidum zwischen beiden Teilen der Doppelschicht nach dem Kupfer gezogen wird, ist gleich $\frac{V - V_1}{a}$, wenn mit V und V_1 die Potentiale beider Körper und mit a der Abstand der beiden Schichten von einander verstanden wird, wenn wir uns der Einfachheit wegen letztere nur auf je einer Fläche ausgebreitet denken. Mit dieser Kraft hält die vom Zink auf das neutrale Fluidum ausgeübte anziehende Kraft das Gleichgewicht. Da sowohl die Kraft als der Abstand a nur von den sich berührenden Stoffen und der Temperatur an der Verbindungsstelle abhängen, ist der Potentialunterschied $V - V_1$ ebenfalls nur von diesen Größen abhängig.

180. Die Spannungsreihe. Hat man drei Metalle a, b, c und man bezeichnet z. B. den Potentialunterschied, wenn die Metalle

a und b verbunden werden mit $V_{a,b}$, so daß also $V_{a,b} = - V_{b,a}$ ist, so zeigt die Erfahrung, daß

$$V_{a,b} = V_{a,c} + V_{c,b}.$$

Daraus folgt, daß elektrisches Gleichgewicht eintritt, sobald man zwei, drei oder mehr Metallstücke so mit einander verbindet, daß sich die freien Enden zu einem Ringe zusammenschließen. Vorausgesetzt wird dabei indessen, daß die Temperatur an allen Stellen des Ringes gleich groß ist (§ 179).

Alle Körper, welche dem hier ausgesprochenen Gesetze gehorchen, heißen Leiter erster Klasse; zu ihnen gehören alle Metalle. Die nicht zur Spannungsreihe gehörigen Körper werden Leiter zweiter Klasse oder Elektrolyte genannt. (Vgl. § 192.)

181. Reibungselektrizität. Die bei der Berührung zweier Körper auftretenden Potentialunterschiede sind sehr klein im Vergleiche zur elektrostatischen Einheit des Potentials oder im Vergleiche zu den durch Elektrisiermaschinen hervorgebrachten Potentialen.

Wenn indessen wenigstens einer dieser Körper ein Nichtleiter oder ein sehr schlechter Leiter ist und wir vermögen den anderen so von ihm herunterzuziehen (durch eine Bewegung parallel zur Berührungsfläche), daß sich die in den Doppelschichten verteilten freien Ladungen vorher nicht (oder nicht ganz) wieder ausgleichen können, so zeigen die Körper nachher ganz beträchtlich höhere Potentiale.

Der Grund hierfür liegt darin, daß die Doppelschicht einen Kondensator von sehr großer Kapazität (wegen der Kleinheit von a) darstellt. Es ist damit gerade so, als wenn man die innere Belegung des in § 177 betrachteten Kugelkondensators auf ein kleines Potential ladet und dann die äußere Belegung entfernt, während die innere Belegung isoliert bleibt. Das Potential steigt dann sofort im Verhältnis der Kapazitäten und daher, wenn a sehr klein war, auf einen sehr hohen Wert.

Auf diesem Umstande beruht die Wirkung der gewöhnlichen Reibungselektrisiermaschine. Der Seidenlappen hinter dem Reibzeuge hat den Zweck, die Ausgleichung der Doppelschichten zu verhüten, wenn das Reibzeug über die Glasfläche streicht. Die Seide steht nämlich in einem ähnlichen elektrischen Gegensatze zum

Glase wie das Amalgam des Reibzeuges und hält daher die elektrische Schicht im Glase zunächst fest. Wenn auch das Seidenstück über die Stelle hinweg gegangen ist, steht dem Ausgleiche der Doppelschicht hindernd im Wege, daß sowohl Glas als Seide sehr schlechte Leiter sind.

Aufg. 120. Eine Anzahl Wassertröpfchen von 0,1 mm Durchmesser, welche sämtlich zum Potential von $^1/_{1000}$ elektrost. Einheiten geladen sind, werden zu einem größeren Tropfen von 2 mm Durchmesser vereinigt; wie groß ist das Potential des letzteren?

Zweites Kapitel.

Die Elektrizität in gleichförmiger Bewegung.

182. Der elektrische Strom. Wenn sich ein unelektrischer Körper bewegt, so bewegt sich die in ihm enthaltene neutrale Elektrizität mit ihm. Wir haben es dann mit einem Vorgange zu thun, der schon in der gewöhnlichen Mechanik behandelt ist; von elektrischen Erscheinungen kann daher hier nicht die Rede sein (§ 161, 6). Anders ist es, wenn der sich bewegende Körper eine freie Ladung besitzt. Die Bewegung der letzteren durch den Raum stellt (nach Versuchen Rowland's) einen elektrischen Strom dar mit allen Eigenschaften, die wir dem letzteren beilegen.

Indessen sind Ströme dieser Art (die sogen. Konvektionsströme) nur von untergeordneter Bedeutung, weil die freien Ladungen, die wir den bewegten Körpern erteilen können, sehr gering sind im Vergleiche zu den neutralen Elektrizitätsmengen, welche in den Körpern enthalten sind. Viel mächtigere Ströme erhalten wir, wenn es uns gelingt, diese neutralen Elektrizitätsmengen selbst in Bewegung zu setzen, während der Körper, in dem sie sich befinden, in Ruhe verbleibt.

Als Beispiel hierfür nehmen wir einen Draht an, auf dessen Oberfläche sich freie Ladungen in solcher Verteilung befinden, daß das Potential sich in der Längsrichtung stetig ändert. Bezeichnen V_1 und V_2 die Potentiale an zwei Stellen, welche den Abstand a

von einander haben, so wirkt an jeder elektrostatischen Einheit des neutralen Fluidums eine Kraft von der Größe $\frac{V_1 - V_2}{a}$, welche dieselbe nach dem Orte des kleineren Potentials V_2 hinzutreiben sucht. In nahezu unmeßbar kleiner Zeit wird hierdurch die vorher bestehende Verteilung der freien Ladungen so geändert, daß das Potentialgefälle verschwindet, wenn nicht auf irgend eine Weise dafür gesorgt wird, daß die nach der Stelle 2 hinströmende Elektrizität stetig fortgenommen und die von der Stelle 1 fortströmende stetig neu ersetzt wird.

Man denke sich zu diesem Zwecke etwa mit den beiden Enden des Drahtes zwei Kugeln verbunden, von denen die eine das Potential V_1 fortwährend beibehält, indem sie sich entsprechend dem Abflusse stetig verkleinert, während die andere durch Vergrößerung ihres Halbmessers (und damit ihrer Kapazität) die zuströmende Elektrizität ohne Vergrößerung ihres Potentials V_2 aufnimmt.

183. Die Stärke des durch den Draht fließenden Stromes wird in derselben Weise gemessen, wie die Strömung des Wassers in einem Flusse oder Kanale, nämlich durch Angabe der Elektrizitätsmenge, welche in der Sekunde durch jeden Querschnitt fließt. Bezeichnet man den Querschnitt des Drahtes mit f, die in 1 ccm enthaltene neutrale Elektrizitätsmenge mit ε, die Geschwindigkeit, mit welcher sie strömt, mit v und die Stromstärke mit J, so ist demnach

$$J = \varepsilon f v$$

und die Stromstärke ist proportional der Geschwindigkeit der Strömung. Bisher ist es indessen noch nicht gelungen, den Wert von ε oder denjenigen von v für irgend einen Fall mit einiger Sicherheit anzugeben. Die Bestimmung des einen dieser beiden Faktoren hätte die des anderen zur unmittelbaren Folge, da sowohl J als f sich ohne Schwierigkeit messen lassen.

Aufg. 121. Welche Dimension hat die Stromstärke im elektrostatischen Maßsysteme?

Aufg. 122. Wie groß ist die Stromstärke in dem am Schlusse von § 182 bezeichneten Falle, wenn das Potential V_1 um 12 elektrostatische Einheiten größer ist als V_2 und der zugehörige Kugelradius in jeder Sekunde um 3 m abnimmt?

184. Widerstand. Die in dem Drahte strömende neutrale Elektrizität erfährt in demselben einen Reibungswiderstand. Derselbe ist nicht von gleicher Art wie die Reibung zwischen festen Körpern, welche die Bewegung völlig verhindert, wenn die treibende Kraft eine gewisse Größe nicht überschreitet, sondern von der Art der Flüssigkeitsreibung, welche erst nach Beginn der Bewegung auftritt und mit der Geschwindigkeit der Bewegung anwächst. Dagegen befolgt der elektrische Reibungswiderstand ein weit einfacheres Gesetz, als die Flüssigkeitsreibung. Er ist nämlich der Geschwindigkeit der Bewegung streng proportional und kann in aller Schärfe gemessen werden.

Eine gleichförmige Bewegung der Elektrizität ist nur möglich, wenn an jeder Stelle die treibende Kraft mit der verzögernden Kraft der Reibung im Gleichgewichte steht.

Dividiert man die Stromstärke J durch den Querschnitt f des Drahtes, so erhält man die auf die Flächeneinheit des Querschnittes entfallende Stromstärke i, welche man als die spezifische Stromstärke oder auch als die Strombichte bezeichnet. Es ist

$$i = \frac{J}{f} = \varepsilon \cdot v.$$

Die verzögernde Kraft der elektrischen Reibung, welche an der elektrostatischen Einheit der neutralen Elektrizität wirkt, ist nach dem oben Gesagten v und daher bei demselben Stoffe auch i direkt proportional. Sie kann daher gleich $w \cdot i$ gesetzt werden, wo der Coeffizient w nur von dem Stoffe des Leiters abhängt und durch Versuche ermittelt werden kann.

Die passendste Bezeichnung von w würde „elektrischer Reibungscoeffizient" sein; man gebraucht aber statt dessen gewöhnlich die Bezeichnung „spezifischer Widerstand".

Die oben erwähnte Gleichgewichtsbedingung liefert nun nach Einsetzen der Werte für die treibende und die verzögernde Kraft die Gleichung

$$w \cdot i = \frac{V_1 - V_2}{a}.$$

185. Gesetz von Ohm. Die soeben angeschriebene Gleichung spricht bereits das Gesetz von Ohm (geb. 1787, gest. 1854) aus.

Gewöhnlich schreibt man sie aber in etwas umgeänderter Gestalt an.

Für den Potentialunterschied $V_1 - V_2$ wollen wir einen einzigen Buchstaben E setzen. Man nennt E die elektromotorische Kraft, welche den Strom in dem betrachteten Drahtstücke unterhält. Diese Bezeichnung ist allerdings keineswegs glücklich gewählt, da sich E gar nicht mit einer beschleunigenden Kraft, sondern mit einer mechanischen Arbeit vergleichen läßt. Sie stammt aus einer Zeit, in welcher die Auffassung der elektrischen Vorgänge noch weit unvollkommener war als heute. Indessen kann man die jetzt allgemein eingebürgerte Bezeichnung festhalten, wenn man sich nur erinnert, daß die elektromotorische Kraft so wenig als die lebendige Kraft eine Kraft im eigentlichen Sinne des Wortes bedeutet.

Das Ohm'sche Gesetz lautet jetzt

$$i \cdot w \cdot a = E,$$

oder, wenn man an Stelle der Stromdichte die ganze Stromstärke J einführt,

$$J \cdot \frac{w \cdot a}{f} = E.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$R = \frac{w \cdot a}{f},$$

so nimmt das Ohm'sche Gesetz diejenige einfache Form an, in welcher es gewöhnlich ausgesprochen wird:

$$J \cdot R = E \quad \text{oder} \quad J = \frac{E}{R}.$$

Die Größe R hängt nur von dem Materiale, dem Querschnitte und der Länge des betrachteten Drahtstückes ab und nicht von den elektrischen Vorgängen, die sich in ihm abspielen. Man nennt sie den Widerstand des Drahtes.

Das Ohm'sche Gesetz läßt sich demnach in den Wortlaut fassen:

Das Produkt aus der Stromstärke und dem Widerstande eines Drahtstückes ist gleich der elektromotorischen Kraft, welche auf dasselbe entfällt.

Aufg. 123. Welches sind die Dimensionen der elektromotorischen Kraft, des Widerstandes und des spezifischen Widerstandes im elektrostatischen Maßsysteme?

Aufg. 124. Wie groß muß der Widerstand des Drahtes in Aufg. 122 sein, wenn das Potential $V_2 = 0$ ist? Welche neue Definition läßt sich daraus ableiten?

186. Wir haben das Ohm'sche Gesetz hier aus unserer Vorstellung von dem Wesen der elektrischen Vorgänge abgeleitet. Wie eine große Zahl der sorgfältigsten Versuche lehrt, ist dasselbe in der Natur ohne jede Ausnahme oder Abweichung streng erfüllt. Daraus kann man zunächst schließen, daß unsere heutigen Vorstellungen von der Elektrizität wenigstens in der Hauptsache richtige sind. Zugleich zeigt sich aber, daß die Bewegungsgesetze der Elektrizität viel einfacherer Art sind, als die der materiellen Flüssigkeiten. Man kann daher, obschon das Verhalten der Elektrizität in vielen Hinsichten noch wenig geklärt ist, eine Reihe von Aufgaben über die elektrische Strömung leichter und mit weit größerer Genauigkeit lösen, als die entsprechenden Aufgaben der Hydromechanik.

187. Gesetz von Joule. Zur Überwindung des elektrischen Reibungswiderstandes wird eine gewisse mechanische Arbeit verbraucht. Wie in allen ähnlichen Fällen der gewöhnlichen Mechanik wird dieselbe in Wärme umgewandelt.

Die Reibung hat nach § 184 die Größe $w \cdot i$ für die elektrische Einheit. Multipliziert man sie mit dem Wege a, auf dem sie überwunden wird, so erhält man die mechanische Arbeit, welche verbraucht wird, um die elektrische Einheit durch das Drahtstück zu führen. In der Sekunde gehen aber J Einheiten neutraler Elektrizität durch das Drahtstück. Bezeichnet man daher die im Drahte in der Sekunde erzeugte Wärme mit Q, gemessen in Erg (d. h. in absoluten Arbeitseinheiten) so ist

$$Q = wiaJ = \frac{wa}{f} . J^2 = RJ^2.$$

Diese Gleichung spricht das von Joule (geb. 1818, gest. 1889) durch genaue Versuche geprüfte Gesetz aus.

In Verbindung mit dem Ohm'schen Gesetze läßt es sich in jeder der folgenden Formen darstellen:

$$Q = RJ^2 = E \cdot J = \frac{E^2}{R}.$$

Man kann das Joule'sche Gesetz auch unmittelbar aus der Bedeutung von E in der Form $Q = E \cdot J$ ableiten. Denn nach § 185 ist E die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um die elektrische Einheit durch das Drahtstück zu führen.

188. **Elektrodynamische Kräfte.** Zwischen zwei Drahtstücken von den sehr kleinen Längen Δs und Δs_1, die von den Strömen J und J_1 durchflossen sind, treten Kräfte auf, einerseits wegen der freien Ladungen ihrer Oberflächen und andererseits solche, die nur auf die Bewegung des neutralen Fluidums zurückgeführt werden können. Leiten die Drahtstücke sehr schlecht, so können die zuerst genannten elektrostatischen Kräfte überwiegen; besteht der Draht dagegen aus irgend einem nicht ganz schlecht leitenden Materiale, z. B. aus einem Metalle, so treten die elektrostatischen Kräfte völlig zurück gegen die anderen, die elektrodynamischen Kräfte.

Es ist bisher nicht ganz zweifellos festgestellt, nach welchem Gesetze diese elektrodynamischen Kräfte wirken. Man kann nämlich immer nur die zwischen zusammengesetzten Stromkreisen auftretenden Wirkungen beobachten und bleibt dann im Zweifel, wie sich dieselben aus denjenigen der kleinsten Teilchen zusammensetzen.

Nach Ampère (geb. 1775, gest. 1836) tritt zwischen den beiden Drahtstücken eine anziehende Kraft von der Größe

$$P = c \cdot \frac{JJ' \Delta s \Delta s'}{r^2} (2 \cos \varepsilon - 3 \cos \vartheta \cos \vartheta')$$

auf, wenn r den Abstand der Mitten von Δs und Δs_1 und $\varepsilon, \vartheta, \vartheta_1$ die in Fig. 29 angegebenen Winkel bedeuten. Ein negativer Wert des Ausdrucks zeigt eine abstoßende Kraft an. Die Größe c ist ein durch Versuche zu ermittelnder konstanter Faktor, dessen Wert davon abhängt, in welchem Maßsysteme die Stromstärken J und J' gemessen werden.

Im elektrostatischen Maßsysteme, das wir bisher stets gebrauchten, hat, wie sich aus der Formel ergiebt, c die Dimension $L^{-2} T^2$ oder $\left(\frac{\text{sec}}{\text{cm}}\right)^2$, d. h. sie stellt das Reziproke einer Geschwindigkeit dar. (Beweis!) In der Regel bezeichnet man diese für die

ganze Elektromechanik sehr wichtige Geschwindigkeit mit dem Buchstaben v; es ist also

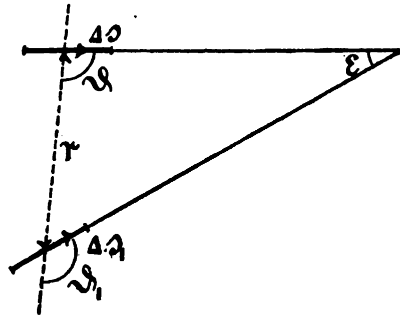
$$c = \frac{1}{v^2}$$

zu setzen. Die bisherigen Ermittelungen des Wertes von v weichen noch ziemlich von einander ab; hier genügt es, wenn wir dafür den abgerundeten Näherungswert

$$v = 30\,000\,000\,000 \text{ cm pro Sekunde}$$

setzen. Im elektrostatischen Maßsysteme nimmt daher der Faktor c den Wert $\frac{1}{9} \cdot 10^{-20}$ an.

Fig. 29.



Wie bereits oben bemerkt wurde, ist das durch die Formel ausgesprochene Ampère'sche Gesetz bis jetzt nicht als ein zweifellos richtiges Naturgesetz anzusehen. Bei allen Anwendungen, die wir in der Elektromechanik davon machen können, führt es aber zu richtigen Folgerungen; wir wollen es daher überall zu Grunde legen.

Aufg. 125. Leite aus der allgemeinen Formel die für besondere Lagen der Stromelemente zu einander giltigen Gesetze ab!

189. Das elektromagnetische Maßsystem. Die Kleinheit des Faktors c in der Ampère'schen Formel bei Zugrundelegung des elektrostatischen Maßsystems weist uns darauf hin, daß die elektrostatische Einheit der Stromstärke ungemein klein ist gegen die gewöhnlich benutzten elektrischen Ströme. In der That gehen bei den technischen Anwendungen in der Regel viele tausend Millionen elektrostatischer Einheiten des neutralen Fluidums durch jeden Querschnitt. Es ist schon deshalb wünschenswert, neben der bisher benutzten für den praktischen Gebrauch eine viel größere Einheit zu besitzen, in welcher sich die gewöhnlich vorkommenden Stromstärken durch nicht so unbequem große Zahlen ausdrücken lassen.

Dazu kommt aber noch ein weit wichtigerer Umstand, welcher sich der allgemeinen Einführung des elektrostatischen Maßsystems

bisher in den Weg gestellt hat. Die Stromstärken werden nämlich in der Regel durch die elektrodynamischen Kräfte gemessen, welche von ihnen ausgehen. Um sie dann in elektrostatischem Maße ausdrücken zu können, müßte man den genauen Wert des Faktors c der Ampère'schen Formel kennen. Derselbe ist aber bisher noch nicht so scharf bestimmt, als es für diese Umrechnung zur Erlangung genauer Resultate erforderlich wäre.

Aus diesen Gründen gebraucht man heute neben dem elektrostatischen Maßsysteme ein von ihm völlig verschiedenes, das elektromagnetische, sowie ein von dem letzteren abgeleitetes praktisches Maßsystem. Man darf es als zweifellos bezeichnen, daß es nur eine Frage der Zeit ist, wann man aufhören wird, diese verschiedenen Maßsysteme nebeneinander zu benutzen. Wahrscheinlich wird man später das elektrostatische Maßsystem allgemein durchführen.

Das elektromagnetische C. G. S. (d. h. Centimeter-Gramm-Sekunde) System erhält man durch die Festsetzung, daß der Faktor c in der Formel des § 188 gleich 1 sein soll. Würde man nur den Zahlenwert gleich 1 setzen und ließe ihm die Dimension $\mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{sec}^{2}$, so würde man zu einer Einheit der Stromstärke gelangen, welche ein Vielfaches der elektrostatischen Stromeinheit (nämlich das v-fache oder 30 000 000 000fache) wäre. Die neue Stromeinheit würde dann zur früheren in derselben Beziehung stehen, wie etwa 1^{m} oder wie der Erdquadrant zu 1^{cm}. Man begnügt sich aber damit nicht, sondern betrachtet c als die absolute Zahl 1, d. h. man giebt ihm (willkürlich) die Dimension Null.

Gerechtfertigt wird dieses Verfahren durch den Umstand, daß die Dimensionen des elektrostatischen Maßsystems auf einer willkürlichen Annahme beruhen (§ 164) und nicht den wahren Sachverhalt wiederspiegeln. Man war deshalb nicht genötigt, diese Dimensionen in das andere Maßsystem hinüberzunehmen, sondern hatte die Freiheit, sie in diesem durch eine abermals willkürliche Annahme von neuem festzusetzen. Zu bedauern ist nur, daß durch das Nebeneinanderbestehen zweier auf ganz verschiedenen Grundlagen aufgebauten Maßsysteme leicht Irrtümer und für den Lernenden Schwierigkeiten hervorgerufen werden.

Aufg. 126. Welches sind die Dimensionen a) der Stromstärke, b) der elektrischen Einheit, c) der Kapazität, d) des Potentials, e) des Widerstandes im elektromagnetischen Maßsysteme?

190. Das praktische Maßsystem. Im Jahre 1881 wurde von dem Kongresse der Elektriker in Paris ein neues Maßsystem für den praktischen Gebrauch festgesetzt, dessen Einheiten sich von dem elektromagnetischen C. G. S.-Systeme nur durch die Beifügung von Faktoren unterscheiden, welche Potenzen von 10 sind.

Zur Vergleichung der drei Maßsysteme ist hier eine Übersichtstafel abgedruckt, welche unter der Voraussetzung berechnet ist, daß die in § 188 erwähnte Geschwindigkeit den Wert $3 \cdot 10^{10}$ habe.

Einheit der Stromstärke: 1 Amp. = $\frac{1}{10}$ magnetische C. G. S.-Einheit = $3 \cdot 10^{9}$ elektrostatische Einheiten.

Einheit der Elektrizitätsmenge: 1 Coulomb = $\frac{1}{10}$ magnetische C. G. S.-Einh. = $3 \cdot 10^{9}$ elektrostatische Einheiten.

Einheit des Widerstandes: 1 Ohm = 10^{9} magnetische C. G. S.-Einh. = $\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ elektrostatische Einheiten.

Einheit der elektromotor. Kraft: 1 Volt = 10^{8} magnetische C. G. S.-Einh. = $\frac{1}{300}$ elektrostatische Einheit.

Einheit der Kapazität: 1 Farad = 10^{-9} magnetische C. G. S.-Einh. = $9 \cdot 10^{11}$ elektrostatische Einheiten.

Einheit der Kapazität: 1 Mikrofarad = 10^{-6} Farad = 10^{-15} magnetische C. G. S.-Einheiten = $9 \cdot 10^{5}$ elektrostatische Einheiten.

191. Die bisher besprochenen elektrischen Gesetze gelten unter der Voraussetzung, daß das elektrostatische Maßsystem zu Grunde liege. Es bleibt noch zu untersuchen, welche Änderungen derselben sich nötig machen, wenn man anstatt dessen die praktischen Einheiten gebraucht.

Bei der Anwendung des Coulomb'schen Gesetzes empfiehlt es sich, vorher stets auf statische Einheiten umzurechnen; ebenso rechnet man vorher auf magnetische Einheiten um, wenn man das Ampère'sche Gesetz anwenden will.

Ohne jede Umrechnung kann dagegen im praktischen Maßsysteme das Ohm'sche Gesetz und die in § 173 angegebene Beziehung zwischen Kapazität, Elektrizitätsmenge und Potential, welche aus der Definition der ersteren hervorgeht, angewendet werden. Die praktischen Einheiten sind nämlich mit Bedacht so gewählt,

daß man bei der Anwendung des Ohm'schen Gesetzes $E = JR$ (§ 185) E in Volt erhält, wenn J in Amp. und R in Ohm eingesetzt wird. Ebenso erhält man die Kapazität in Farad ausgedrückt, wenn man die in Coul. gemessene Elektrizitätsmenge durch das Potential in Volt dividiert. (Beweis!) Dagegen muß eine Angabe in Mikrofarad zur Anwendung jener Beziehung zuvor in Farad umgerechnet werden.

Das Joule'sche Gesetz (§ 187) endlich kann entweder so angewendet werden, daß man die elektrischen Größen nach der in § 190 gegebenen Tafel in elektrostatische Einheiten umrechnet, in welchem Falle man die Stromwärme in absoluten Arbeitseinheiten (Erg) ausgedrückt erhält oder man setzt für die elektrischen Größen ihre Werte im praktischen Maßsysteme ein und erhält dann die in der Sekunde erzeugte Reibungswärme Q in einer neuen Einheit, welche man als Volt-Amp. oder auch als Watt bezeichnet. Da $Q = EJ$ und 1 Volt $= \frac{1}{300}$, 1 Amp. $= 3 \cdot 10^9$ statische Einh. ist, folgt 1 Volt-Amp. oder 1 Watt $= 10^7$ Erg pro Sekunde. Nun kann man in unserer Gegend $1^{kgr} = 981\,000$ Dyn setzen. Es gehen daher $981 \cdot 10^5$ Erg auf 1^{mkgr} und auf eine Pferdekraft kommen $75 \cdot 981 \cdot 10^5$ Erg pro Sekunde. Man hat daher auch

$$1 \text{ Watt} = \frac{10^7}{75 \cdot 981 \cdot 10^5} \text{ P. S.} = \text{ca. } \frac{1}{735} \text{ P. S.}$$

Setzt man ferner 1 Cal. = 1000 cal (Gramm-Calorien) und gleich 430^{mkgr}, so folgt auch

$$1 \text{ Watt} = \frac{10^7}{43 \cdot 981 \cdot 10^3} = \text{ca. } 0{,}237 \text{ cal} = 237 \cdot 10^{-6} \text{ Cal. pro Sek.}$$

Aufg. 127. In einem Drahte fließt ein Strom von 2 Amp. Wieviel Zeit vergeht, bis soviel Elektrizität durch jeden Querschnitt geflossen ist als erforderlich ist, um eine isolierte Kugel von 15^{cm} Radius auf das Potential 200 Volt zu laden?

Aufg. 128. Ein Kupferdraht von 50^{m} Länge und 1^{qmm} Querschnitt hat den Widerstand 1 Ohm. Wie groß ist der spezifische Widerstand (§ 184) der Kupfersorte ausgedrückt 1) in statischen Einheiten, 2) in Mikrohm (d. i. Milliontel Ohm) pro ccm?

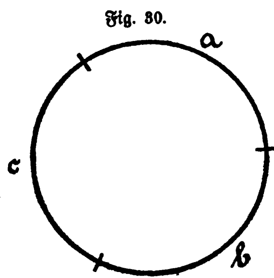
Aufg. 129. Ein Eisendraht von 2^{mm} Stärke (spezifischer Widerstand = 9,8 Mikrohm pro ccm) und 5^{m} Länge wird an den Enden auf einer Potentialdifferenz von 3 Volt gehalten. Wie groß ist der

zustande kommende Strom und wieviel cal werden in der Sekunde in demselben entwickelt?

Aufg. 130. Eine Glühlampe hat 105 Volt Klemmenspannung und 150 Ohm Widerstand im heißen Zustande. Wieviel Pferdekräfte sind in der Maschinenstation für ihren Betrieb erforderlich, wenn die Arbeitsverluste 30% betragen?

192. Das galvanische Element. Nicht alle Leiter gehören der Spannungsreihe (§ 180) an. Man denke sich nun drei Leiter a, b, c, von denen a und b Leiter erster Klasse sind, während c ein Leiter zweiter Klasse ist, so mit einander in Berührung gebracht, daß ein zusammenhängender Ring (Fig. 30) entsteht. Wäre auch c ein Leiter erster Klasse, so wäre (§ 180)

Fig. 30.



$$V_{a,b} + V_{b,c} + V_{c,a} = 0.$$

Im vorliegenden Falle ist dagegen

$$V_{a,b} + V_{b,c} + V_{c,a} = E,$$

wo E ein von Null verschiedener positiver oder negativer Wert ist. Ein elektrisches Gleichgewicht ist hier nicht möglich. Denkt man sich nämlich die Einheit des neutralen Fluidums durch den ganzen Ring im Sinne des Uhrzeigers herumgeführt, so wird beim Übergange von a auf b die Arbeit $V_a - V_b$, d. h. $V_{a,b}$ zur Überwindung der an der Berührungsstelle wirkenden Scheidungskräfte verbraucht (bezw. wenn $V_{a,b}$ negativ ist gewonnen). Ebenso verhält es sich beim Übergange von b auf c und von c auf a. Ist E negativ, so kommt bei dem ganzen Kreislaufe die positive Arbeit E der Scheidungskräfte zustande. Da nun das Potential der von den freien Ladungen herrührenden elektrischen Kräfte bei einem ganzen Kreislaufe wieder den früheren Wert erlangt, die Summe der von den letzteren geleisteten Arbeiten daher gleich Null ist, so folgt aus dem vierten Hauptlehrsatze der Mechanik, daß die elektrischen Kräfte an dem neutralen Fluidum des Ringes nicht im Gleichgewichte sein können. Es tritt vielmehr eine Bewegung im Sinne des Uhrzeigers ein, wenn E negativ ist. Sofern die Beschaffenheit der Leiter a, b, c durch den entstehenden Strom nicht geändert wird, d. h. so lange die Bewegungsursache fortdauert,

findet auch eine fortdauernde Beschleunigung des neutralen Fluidums statt.

Gleichgewicht tritt erst durch das Hinzukommen der Reibung des elektrischen Stromes in den Leitern ein. Das Potential jedes einzelnen Leiters nimmt dann an verschiedenen Punkten desselben verschiedene Werte an.

Bezeichnet man das Anfangspotential des Leiters a, wenn man im Sinne des Uhrzeigers herumgeht, mit V_a^0 und das Endpotential mit V_a' (und entsprechend bei den beiden anderen Leitern), so erhält man nun nach dem vierten Hauptlehrsatze die Gleichgewichtsbedingung

$$V_{a,b} + V_{b,c} + V_{c,a} + V_a^0 - V_a' + V_b^0 - V_b' + V_c^0 - V_c' = 0,$$

wofür sich auch

$$V_a' - V_a^0 + V_b' - V_b^0 + V_c' - V_c' = E$$

schreiben läßt.

Die Potentialdifferenz $V_a' - V_a^0$ ist aber die elektromotorische Kraft, welche auf den Leiter a entfällt. Sie kann nach § 185 gleich $J \cdot R_a$ gesetzt werden, wenn man unter J einen entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers laufenden Strom versteht. Die Gleichung geht damit über in

$$J(R_a + R_b + R_c) = E \quad \text{oder} \quad J \cdot R = E.$$

R heißt der Widerstand des ganzen Stromkreises; er ist gleich der Summe aller Einzelwiderstände. Ebenso heißt E die elektromotorische Kraft des galvanischen Elementes und ist gleich der Summe der auf die einzelnen Leiter a, b, c entfallenden elektromotorischen Kräfte.

Das Ohm'sche Gesetz gilt daher nicht nur für einen einzelnen Leiter, sondern ebenso für den ganzen Schließungskreis eines galvanischen Elementes.

193. Mit Hilfe eines Leiters zweiter Klasse kann man einen Strom stetig unterhalten und vermittelst desselben Wärme entwickeln. Aus dem ersten Hauptsatze der Energetik folgt daher, daß damit zugleich eine Veränderung verbunden sein muß, welche die hierzu erforderliche Energie liefert. In der That sind alle Leiter zweiter Klasse Elektrolyte, d. h. sie werden durch den

durchgehenden Strom in ihrer chemischen Zusammensetzung geändert. Die Arbeit der hierbei auftretenden chemischen Kräfte ist die Quelle der zur Unterhaltung des Stromes erforderlichen Energie.

Auf die thermochemischen Beziehungen, welche in der galvanischen Kette bestehen, kann indessen hier nicht eingegangen werden.

194. Das offene galvanische Element. Führt man durch das Metall a (oder b) des isoliert aufgestellten Leiterkreises der Fig. 30 einen Schnitt, so erhält man ein offenes galvanisches Element. In den einzelnen Teilen desselben nimmt das Potential wieder konstante Werte an, da eine andauernde Strömung nicht mehr möglich ist. Indessen haben wir jetzt zwei Leiter a zu unterscheiden, deren Potentiale mit $V_a{}^0$ und V_a' bezeichnet werden sollen. Zur Berechnung von $V_a{}^0$, wenn V_a' gegeben ist, haben wir die Gleichung

$$V_a{}^0 = V_a' + V_{a,b} + V_{b,c} + V_{c,a},$$

wofür sich auch schreiben läßt:

$$V_a{}^0 - V_a' = E,$$

d. h. die Potentialdifferenz an den Enden des offenen Elementes ist gleich der elektromotorischen Kraft desselben.

Die elektromotorischen Kräfte der gebräuchlichen galvanischen Elemente liegen zwischen 1 und 2 Volt. Bei der Festsetzung des praktischen Maßsystems wurde besonders darauf geachtet, die Potentialeinheit 1 Volt so zu wählen, daß sie von den elektromotorischen Kräften der galvanischen Elemente nicht viel abwich. Die elektromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes ist etwa = 1,09 Volt.

195. Diagramm der Potentialwerte. Eine sehr übersichtliche Darstellung über die Potentialverteilung in dem galvanischen Elemente liefert das in Fig. 31 gezeichnete Diagramm. Es sei etwa unter dem Leiter a Zink (Zn), unter b Kupfer (Cu) und unter c eine Lösung von Zinkvitriol ($ZnSO_4$) verstanden. Fig. 31 stellt dann ein Daniell'sches Element dar.

Nach Versuchen von Ayrton und Perry ist für die hier in Betracht kommenden Leiter

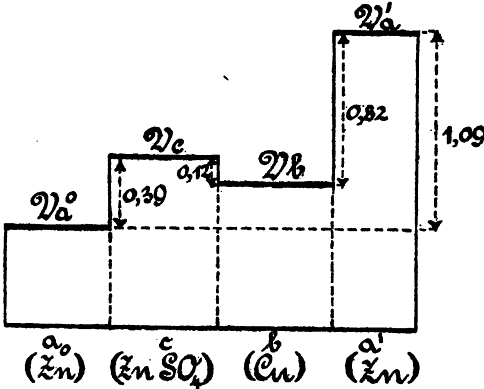
$$V_{a,b} = +\ 0{,}82 \text{ Volt}; \quad V_{b,c} = -\ 0{,}12 \text{ Volt};$$
$$V_{c,a} = +\ 0{,}39 \text{ Volt}.$$

Die elektromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes ist daher wie oben angegeben gleich

$$E = +\,0{,}82 - 0{,}12 + 0{,}39 = 1{,}09 \text{ Volt.}$$

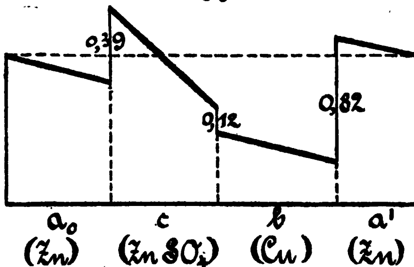
In Fig. 31 sind auf der Grundlinie die Längsausdehnungen der Leiter a_0, c, b, a' angegeben; die Ordinaten geben in irgend einem Maßstabe die Potentiale an, welche an der betreffenden Stelle bestehen. Das Potential V_a^0 kann einen beliebigen Wert haben (selbst viele tausend Volt, wenn man das Element auf einen Isolierschemel stellt und ihm mit einer Elektrisiermaschine eine statische Ladung erteilt). Die übrigen Potentiale V_c, V_b und V_a' ergeben sich dann durch Abtragen der oben mitgeteilten Potentialunterschiede.

Fig. 31.



196. Die Potentialverteilung im geschlossenen galvanischen Elemente giebt Fig. 32 an. Die mit einander in Berührung kommenden Enden von a_0 und a_1 erlangen hier gleiches Potential; dagegen fallen in den Leitern die Potentialwerte alle nach rechts hin ab. Dies zeigt uns einen von a über c nach b fließenden Strom an, d. h. einen Strom, welcher außerhalb der Flüssigkeit vom Kupfer zum Zink und in der Flüssigkeit vom Zink zum Kupfer hinfließt.

Fig. 32.



Die Winkel, um welche die Linien der Figur gegen die

Horizontale geneigt sind, hängen von den Widerständen der einzelnen Leiter ab. Da c viel schlechter leitet als die Metalle, sinkt auch in c das Potential viel rascher als in jenen. Genau im Maßstabe gezeichnet, würde die Linie über c noch viel steiler abfallen.

In ganz ähnlicher Weise lassen sich auch die Potentialwerte für alle übrigen galvanischen Elemente zur Darstellung bringen. Kommen in einer solchen zwei Leiter zweiter Klasse vor, so schiebt sich einfach noch eine Linie in das Diagramm ein.

197. Innerer Widerstand. Zu einem galvanischen Elemente gehören stets zwei Metallplatten (wovon eine durch eine Kohlenplatte vertreten sein kann) und mindestens eine oder zwei (durch eine poröse Scheidewand getrennte) elektrolytische Flüssigkeiten. Verbindet man die aus dem Gefäße hervorragenden Platten unmittelbar (oder durch einen kurzen, dicken Draht von sehr geringem Widerstande) mit einander, so heißt das Element kurz geschlossen. Der Widerstand in dem so gebildeten Stromkreise setzt sich zusammen aus den Widerständen der Metallplatten und demjenigen der Flüssigkeit. Der letztere ist aber so viel größer als jene, daß man nur auf diesen zu achten braucht. Die Summe aller Widerstände heißt der innere Widerstand des Elementes und kann daher mit großer Annäherung gleich dem Widerstande des Elektrolyts, also gleich $\frac{w \cdot a}{f}$ gesetzt werden, worin w den spezifischen Widerstand, a den Plattenabstand und f die Plattenfläche bedeutet.

Bezeichnet man den inneren Widerstand mit R_i, so ist der Strom in dem kurz geschlossenen galvanischen Elemente

$$J = \frac{E}{R_i}$$

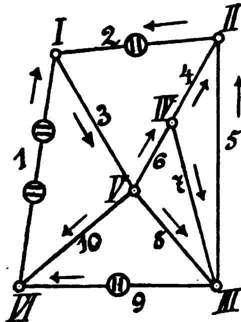
und wenn man zwischen die Polklemmen einen äußeren Widerstand R_a schaltet,

$$J = \frac{E}{R_i + R_a}.$$

Aufg. 131. Wie unterscheidet sich ein großplattiges Element von einem kleinen gleicher Art in der Wirkungsweise? Auf welchem Wege kann man galvanische Elemente mit sehr geringem inneren Widerstande konstruieren? (Bleiaccumulatoren!)

198. Stromverzweigungen. Man denke sich eine Anzahl von drahtförmigen Leitern zu einem Netze nach Art der Fig. 33 verbunden. Die Gestalt der einzelnen Seiten dieses Netzes ist gleichgiltig; man zeichnet sie der Einfachheit wegen geradlinig, doch kommt es nur auf die Art der Verbindung der einzelnen Leiter unter einander an. In einzelnen Seiten des Netzes seien galvanische Elemente eingeschaltet. Man soll die Stromverteilung in dem Netze berechnen.

Fig. 33.



Zur Lösung der Aufgabe denke man sich jedes galvanische Element durch einen Draht von gleich großem Widerstande ersetzt, in welchem an der betreffenden Stelle ein Potentialabfall unterhalten wird, der der elektromotorischen Kraft des Elementes gleich ist.

Die Verbindungsstellen, von denen drei oder mehr Zweige ausgehen, heißen die Knotenpunkte des Stromnetzes; sie sind in Fig. 33 mit römischen Ziffern bezeichnet. Das Potential V_I eines Knotenpunktes kann beliebig angenommen werden (§ 195); die Potentiale der übrigen Knotenpunkte sind dann die Unbekannten, auf deren Ermittelung es vor allem ankommt.

Jeder Seite des Netzes lege man einen Pfeil bei, welcher die Richtung angiebt, in welcher man den Strom in dieser Seite als positiv rechnen will. Man thut gut, jene Richtung als die positive anzusehen, in welcher vermutlich der Strom wirklich fließt, in den Seiten, welche ein galvanisches Element enthalten also so, wie dieses die Elektrizität antreibt. Für jede Netzseite erhält man durch das Ohm'sche Gesetz (und für die Verhältnisse der Fig. 33) eine der nachfolgenden Gleichungen:

$$J_1 = \frac{V_{VI} - V_I + 2E_1}{R_1}; \quad J_2 = \frac{V_{II} - V_I + E_2}{R_2};$$

$$J_3 = \frac{V_I - V_V}{R_3} \text{ u. s. w.}$$

Nachdem so die unbekannten Stromstärken in den gleichfalls unbekannten Knotenpunktspotentialen ausgedrückt sind, schreibe man

für jeden Knotenpunkt eine Gleichung an, welche ausdrückt, daß die algebraische Summe der zu- und abströmenden Elektrizitätsmengen verschwinden muß. Man erhält so

$$J_1 + J_2 - J_3 = 0; \quad J_4 + J_5 - J_2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

Die letzte dieser Gleichungen ist eine notwendige Folge der vorhergehenden; man hat also $n-1$ von einander unabhängige Gleichungen ersten Grades, wenn man mit n die Zahl der Knotenpunkte bezeichnet und kann daraus die $n-1$ Unbekannten V_{II}, V_{III} u. s. w. berechnen, nachdem man für die J die oben ermittelten Werte eingeführt hat. Nachdem dies geschehen ist, findet man leicht die Stromstärken.

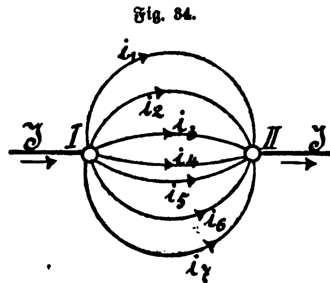
Aufg. 132. Führe die soeben angedeutete Rechnung für den Fall durch, daß die Widerstände der Netzseiten 1, 2, 3 u. s. f. bezw. 13, 8, 2, 5, 7, 20, 11, 9, 12, 3 Ohm und die elektromotorische Kraft aller Elemente je 1,9 Volt beträgt! (V_I setze man dabei $= 0$.)

Aufg. 133. Beweise den Kirchhoff'schen Satz $\Sigma RJ = \Sigma E$ für ein beliebiges dem Stromnetze angehöriges Leitervieleck!

Aufg. 134. Leite die Formel für die Wheatstone'sche Brücke ab!

199. Parallelschaltung. Ein sehr einfacher Fall der Stromverzweigung, welcher in Fig. 34 dargestellt ist, verdient wegen seiner Häufigkeit noch eine besondere Beachtung. Eine Hauptleitung, welche den Gesamtstrom J führt, ist zwischen den Punkten I und II unterbrochen, dagegen ist zwischen I und II eine Anzahl von Zweigleitungen eingeschaltet, auf welche sich der Strom verteilt. Man soll erstens die Stärke der Zweigströme und ferner die Größe des resultierenden Widerstandes aller Zweige berechnen, d. h. jenen Widerstand eines einzelnen Drahtes, welcher, an die Stelle der Zweige gesetzt, bei derselben Potentialdifferenz dieselbe Gesamtströmung zwischen den Punkten I und II aufnehmen würde.

Fig. 34.



Nach dem Ohm'schen Gesetze ist

$$i_1 r_1 = i_2 r_2 = i_3 r_3 = \cdots\cdots = V_I - V_{II}$$

und daher, da $J = \Sigma i$ ist,

$$i_1 \cdot r_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \cdots\right) = J.$$

Der resultierende Widerstand aller Zweige R bestimmt sich aus der Gleichung $JR = V_I - V_{II}$, woraus unter Beachtung der vorhergehenden Gleichungen

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \cdots\cdots}$$

folgt. Man kann dieses Resultat in sehr viel einfacherer Weise aussprechen, wenn man den Begriff der Leitungsfähigkeit einführt. Darunter versteht man das Reziproke des Widerstandes. Bezeichnet man die Leitungsfähigkeiten mit L bezw. $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$, so geht die vorige Gleichung über in

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots\cdots = \sum l.$$

Die Leitungsfähigkeit parallel oder neben einander geschalteter Drähte ist daher gleich der Summe der einzelnen Leitungsfähigkeiten.

Im Gegensatze dazu ist bei hintereinander geschalteten Drähten der Widerstand gleich der Summe der Einzelwiderstände.

Von gewöhnlicher Parallelschaltung spricht man auch dann oft noch, wenn die Zweigleitungen nicht alle von demselben Punkte I und II (Fig. 34) der Hauptleitung abgehen, wie z. B. die Lampen der elektrischen Beleuchtungsanlagen. Das ist immer so lange zulässig, als der Widerstand der Hauptleitung, welcher zwischen den einzelnen Abzweigungsstellen liegt, sehr klein ist im Vergleiche zum Widerstande jedes einzelnen Zweiges.

200. Es sei jetzt angenommen, daß jeder Zweig in Fig. 34 eine elektromotorische Kraft (durch Einschaltung von galvanischen Elementen) enthalte, welche bei allen von gleicher Größe und Richtung sein soll. Man hat dann

$$i_1 r_1 = i_2 r_2 = \cdots\cdots = V_I - V_{II} + E = JR.$$

Daraus folgt, daß auch hier alle Zweige durch eine einzige Leitung ersetzt werden können, in welcher die elektromotorische Kraft nur einmal vorkommt, und deren Leitungsfähigkeit

gleich der Summe aller Leitungsfähigkeiten ist. Die Parallelschaltung galvanischer Elemente (oder anderer Stromerzeuger) hat daher nur den Erfolg einer Widerstandsverminderung; eine Vervielfältigung der elektromotorischen Kraft findet bei ihr nicht statt.

Aufg. 135. Man hat 60 Elemente von je 2 Volt, bezw. 3 Ohm. Ermittele, wie groß bei den verschiedenen Schaltungsweisen, welche hier möglich sind, die Stromstärke bei einem äußeren Widerstande von 5 Ohm wird! Bei welcher Schaltung erhält man den größten Strom und bei welcher ist der Zinkverbrauch für jedes durch die Leitung gegangene Coulomb am kleinsten?

Aufg. 136. Ein Dreileiterkabel führt von der Maschinenstation einer elektrischen Beleuchtungsanlage nach einer Verbrauchsstelle, an welcher zwischen dem Ausgleichleiter und dem positiven und negativen Leiter je 100 Lampen parallel geschaltet sind. Jede Lampe hat 95 Volt Klemmenspannung und 130 Ohm Widerstand; wie groß muß der Widerstand jedes Hauptleiters gemacht werden, wenn der Spannungsverlust für jeden Zweig 10 Volt betragen soll?

Aufg. 137. Wenn der Ausgleichleiter im vorhergehenden Falle die Hälfte des Querschnittes von den Hauptleitern erhält, um wieviel schwankt die Klemmenspannung der Lampe, wenn in einem Zweige des Systems nur 80 Lampen brennen, während die andere voll belastet ist?

Aufg. 138. Wie berechnet man die Bleisicherheitsstücke, welche in einen Stromkreis eingeschaltet werden, um denselben durch Abschmelzen zu unterbrechen, wenn die Stromstärke über ein zulässiges Maß hinausgeht?

Aufg. 139. Welche Vorzüge hat die Verwendung hochgespannter Ströme, wenn es sich darum handelt, elektrische Energie auf größere Entfernungen zu übertragen?

Drittes Kapitel.

Der Magnetismus.

201. Von den Magneten gehen besondere Kräfte aus, die magnetischen Kräfte, welche man seit langer Zeit kennt und die man früher durch die Annahme zu erklären suchte, daß in den magnetischen Körpern zwei unwägbare Flüssigkeiten, der Nordmagnetismus und der Südmagnetismus enthalten wären, die sich

in derselben Weise anziehen oder abstoßen sollten, wie freie elektrische Ladungen. Als man jedoch erkannte, daß auch der elektrische Strom magnetische Kräfte ausübt, wurde man dazu geführt, den Magnetismus als eine Eigenschaft des damit behafteten Körpers anzusehen, welcher von elektrischen Strömen herrührt, die im Inneren des letzteren kreisen. Ampère hat gezeigt, daß sich alle magnetischen Wirkungen aus dieser Annahme, welche heute von allen Naturforschern geteilt wird, erklären lassen.

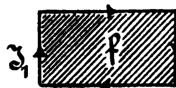
Nach dieser Anschauung ist z. B. ein Eisenmolekül fortwährend von einem elektrischen Strome in bestimmter Richtung umflossen. Ein Reibungswiderstand setzt sich demselben nicht entgegen, weil der Strom nicht durch die wägbare Materie, sondern durch den diese umgebenden leeren Raum fließt. Es bedarf daher auch keiner elektromotorischen Kraft, um den Strom im Gange zu erhalten und ebensowenig findet eine Wärmeentwickelung durch denselben statt.

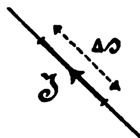
Die Kräfte, welche von diesem Eisenmoleküle (oder Elementarmagneten) ausgehen, sind keine anderen als die zwischen elektrischen Strömen stets beobachteten elektrodynamischen Kräfte, von welchen man annehmen darf, daß sie dem in § 188 erwähnten Ampère-schen Gesetze gehorchen. Sind in einem Eisenstücke die Moleküle so unregelmäßig gelagert, daß keine Richtung vor den anderen bevorzugt ist, so heben sich alle Einzelwirkungen nach außen auf; das Eisen ist unmagnetisch. Magnetisch wird das Eisen erst dadurch, daß die Achsen der Moleküle mehr oder weniger gleich gerichtet werden. Sehr weiches Eisen stellt einer Drehung der Moleküle nur geringen (Reibungs-) Widerstand entgegen, es wird leicht magnetisch und verliert den Magnetismus ebenso leicht wieder. Umgekehrt ist es bei spröderem Eisen, besonders bei gehärtetem Stahle, aus dem man permanente Magnete herstellen kann.

Die Ableitung der Gesetze des Magnetismus aus denjenigen, welche für den elektrischen Strom gelten, ist nun eine rein mathematische Aufgabe, zu deren Lösung indessen die weitgehendsten mathematischen Hilfsmittel erforderlich sind. Hier genügt es, hiervon eine ungefähre Vorstellung zu geben. Diesem Zwecke dienen die nachfolgenden Aufgaben, welche sich mit Hilfe des Ampère'schen Gesetzes leicht lösen lassen.

Aufg. 140. Um den Umfang einer sehr kleinen Rechteckfläche fließe ein Strom J_1 (Fig. 35). Ermittle die Resultierende der auf ein Element Δs eines zweiten Stromes J wirkenden elektrodynamischen Kräfte durch Konstruktion!

Fig. 35.





Aufg. 141. Beweise, daß diese Resultierende unter sonst gleichen Umständen der Rechteckfläche f proportional ist! (Daraus folgt, daß man die Fernewirkung einer magnetischen Scheibe durch diejenige eines Stromes ersetzen kann, welcher um den Umfang der Scheibe fließt.)

Aufg. 142. Das vom Strome umflossene Rechteck der Fig. 35 sei an einer Achse, die in der Ebene desselben liegt, drehbar befestigt und der Wirkung der vom Stromelemente $J \cdot \Delta s$ ausgehenden elektrodynamischen Kräfte ausgesetzt. Beweise, daß Gleichgewicht nur möglich ist, wenn die Ebene des Rechtecks durch das Stromelement geht. Wann ist das Gleichgewicht stabil, wann labil? Wie verhalten sich zwei solche Rechteckflächen zu einander, wenn ihre Drehachsen in einer Ebene liegen?

202. Magnetisches Moment. Die stromumflossene Rechteckfläche sei jetzt ein Elementarmagnet, und eine in der Mitte des Rechtecks zur Ebene desselben senkrecht gezogene Linie die magnetische Achse desselben genannt. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, daß ein Stromelement einen Elementarmagneten, welcher um seine Mitte drehbar befestigt ist, so zu richten sucht, daß die magnetische Achse rechtwinklig zum Stromelemente steht. In jeder anderen Stellung haben die an dem Elementarmagneten wirkenden Kräfte ein resultierendes statisches Moment, das seinen größten Wert annimmt, wenn die magnetische Achse dem Stromelemente zugekehrt ist. In jeder anderen Stellung ist es gleich dem Produkte aus diesem größten Werte und dem Cosinus des Winkels zwischen der magnetischen Achse und der Ebene, in welcher das Stromelement liegt.

Jener größte Wert hängt aber einerseits ab von dem Stromelemente und andererseits von der Stromstärke und der davon umflossenen Fläche des Elementarmagneten und zwar ist er den beiden letztgenannten Größen direkt proportional. Es kommt also

nur auf das Produkt beider an. Man nennt dasselbe das magnetische Element des Elementarmagneten.

Die Erklärung der Bezeichnung ergiebt sich aus der älteren Anschauung über den Magnetismus. Man denke sich nämlich auf der magnetischen Achse des Elementarmagneten zwei Punkte in gleichen Abständen von der Drehachse ausgewählt, die als Angriffspunkte eines Kräftepaares dienen sollen, dessen statisches Moment gleich demjenigen der oben besprochenen Kräfte ist. Die Angriffspunkte selbst kann man sich dann mit Nord- bezw. Südmagnetismus behaftet denken und den Grund für das Auftreten der Kräfte in der Anwesenheit der magnetischen Massen suchen. Auch in diesem Falle kommt es nicht unmittelbar auf die Menge Magnetismus an, welche man sich auf jedem Pole des Elementarmagneten angehäuft denkt, sondern auf das Produkt aus der Menge und dem Polabstande. Dieses Produkt ist aber gerade das magnetische Moment des Magneten. Es ist hiernach leicht ersichtlich, was man unter der Einheit des Magnetismus zu verstehen hat, nämlich jene magnetische Masse, welche einem Magneten von 1 cm Polabstand das magnetische Moment 1 verleiht. Indessen ist es gar nicht nötig, ein Maß für die fingierten magnetischen Massen aufzustellen; es genügt überall mit dem magnetischen Momente zu rechnen.

203. Vereinigt man mehrere Elementarmagnete mit einander, so daß ihre magnetischen Achsen gleich gerichtet sind, so ist das magnetische Moment des entstehenden zusammengesetzten Magneten gleich der Summe aller einzelnen magnetischen Momente. Das magnetische Moment eines Stahlmagneten ist daher, wenn alle Teile gleichmäßig magnetisiert sind, gleich dem Produkte aus dem Volumen des Magneten und dem magnetischen Momente, welches auf 1 ccm desselben kommt. Letzteres nennt man die Intensität der Magnetisierung. Die Intensität der größten permanenten Magnetisierung, welche man einem Stahlmagneten erteilen kann, beträgt etwa 800 Einheiten des elektromagnetischen C. G. S.-Systems; die größte vorübergehende Magnetisierung, welche in weichem Eisen möglich ist, ungefähr das Doppelte.

204. Es sei wiederum, wie in Fig. 35, ein Strom und ein Elementarmagnet gegeben. Dabei ist aber jetzt nicht nötig, daß wir die Betrachtung auf die Kräfte einschränken, welche von einem Stromelemente herrühren; wir können anstatt dessen ein beliebig großes Stück oder auch den ganzen Stromkreis ins Auge fassen.

Das statische Moment der Kräfte, welche den Elementarmagneten senkrecht zur Stromebene zu stellen suchen, ist zunächst

dem magnetischen Momente proportional und hängt im übrigen nur von den besonderen Verhältnissen des Stromes ab, von welchem die Wirkung ausgeht. Derjenige Teil der Umgebung des Stromes, in welchem diese Wirkung noch eine merkliche Größe besitzt, heißt das **magnetische Feld** desselben. Unter der **Stärke** oder **Intensität des magnetischen Feldes** versteht man den Faktor, mit welchem man das magnetische Moment multiplizieren muß, um den Maximalwert des statischen Momentes der den Elementarmagneteten richtenden Kräfte zu erhalten.

Aufg. 143. Welche Dimension hat das magnetische Moment im elektromagnetischen Maßsysteme? Beweise, daß die Intensität der Magnetisierung und die Intensität des magnetischen Feldes zwei Größen gleicher Art sind!

Aufg. 144. Eine kreisförmige Stahlplatte von 2^{mm} Dicke und 50^{mm} Durchmesser sei zum Maximum magnetisiert (§ 203). Wieviel Amp. müßte ein Strom haben, welcher den Umfang des Kreises umfließt, um die magnetische Wirkung der Stahlplatte zu ersetzen?

Lehrsatz z. Üb. Zwei oder mehr benachbarte Ströme bringen ein magnetisches Feld hervor, dessen Richtung und Größe sich durch graphische Summierung der einzelnen Feldstärken ergiebt.

205. Kraftlinien. Um von dem magnetischen Felde eines elektrischen Stromes eine vollständige Beschreibung zu geben, ist es erforderlich, für jede Stelle die Richtung und Stärke des Feldes zur Darstellung zu bringen. Man denke sich zu diesem Zwecke einen Elementarmagneten im magnetischen Felde herumgeführt. Die Richtung, in welcher er sich einstellt, giebt die Feldrichtung oder die Richtung der magnetischen Kraft an. Geht man stets in der Richtung der magnetischen Kraft weiter, so erhält man eine zusammenhängende Linie, welche nach Faraday eine **Kraftlinie** genannt wird. Durch jeden Punkt des magnetischen Feldes geht eine solche Kraftlinie; man kann sich indessen damit begnügen, eine gewisse Anzahl dieser Kraftlinien zu verzeichnen.

Eine einzelne Kraftlinie lehrt noch nichts über die Stärke des magnetischen Feldes. Man kann aber auch die letztere in der Zeichnung ersichtlich machen, wenn man die Festsetzung trifft, daß die gezeichneten Kraftlinien um so dichter zusammenliegen sollen, je stärker das Feld an der betreffenden Stelle ist. Die Feldstärke

kann dann genau angegeben werden durch die Zahl der Kraftlinien, welche in einem Bündel von 1^{qcm} Querschnittsfläche vorhanden sind.

Allerdings entsteht hier die Frage, ob eine Darstellung dieser Art überhaupt möglich ist. Man kann nämlich etwa an einer Stelle damit beginnen, Kraftlinien in solchen Abständen zu konstruieren, daß die Zahl derselben auf 1^{qcm} in einem vorgeschriebenen Maßstabe die Feldstärke angiebt. Es fragt sich aber dann, ob dies auch noch zutrifft, wenn man die Kraftlinien fortsetzt und so zu anderen Stellen des Feldes gelangt.

Dies trifft allerdings zu und zwar ist der Grund dafür darin zu erblicken, daß die elektrodynamischen und daher die magnetischen Kräfte mit dem Quadrate der Entfernung abnehmen. Denken wir uns nämlich eine sich stetig erweiternde Kugel, welche das magnetische Feld umschließt, so wird die Kraft kleiner im Verhältnisse zum Quadrate der Entfernung und im selben Maße nimmt die Fläche, auf welche sich die Kraftlinien verteilen, zu. Durch eine weitere Ausführung des in § 171 gegebenen Beweises, welcher sich dem vorliegenden Falle leicht anpassen läßt, wenn man unter A in Fig. 28 einen magnetischen Pol versteht, läßt sich dies noch strenger nachweisen.

Man drückt dieses Verhältnis nach dem Vorgange der Engländer in sehr bezeichnender Weise durch die Worte aus: „die Kraft fließt" im magnetischen Felde. Man sagt damit, daß in einen geschlossenen Raum im magnetischen Felde ebensoviel Kraftlinien eintreten als austreten. Die Kraftlinien verhalten sich so wie die Strömungslinien in einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit. Der Kraftfluß wird durch sie in derselben Weise zur Anschauung gebracht, wie durch die Strömungslinien die Bewegungen in einer Flüssigkeit.

206. Der magnetischen Achse eines Elementarmagneten legt man eine bestimmte Richtung bei. Betrachtet man die vom Strome J_1 umflossene Fläche f der Fig. 35 von der einen Seite der magnetischen Achse aus, so läuft der Strom J_1 im Sinne des Uhrzeigers herum; diese Seite heißt die südmagnetische. Für einen Beschauer auf der anderen Seite erscheint der Umlaufsinn entgegengesetzt; ihm ist die nordmagnetische Seite zugekehrt.

Die Richtung der magnetischen Achse läßt sich dadurch kenntlich machen, daß man einen Pfeil auf derselben anbringt, welcher von der südmagnetischen nach der nordmagnetischen Seite hinzeigt. Auch den Kraftlinien des magnetischen Feldes ist ein bestimmter Pfeil beizulegen, so nämlich, daß er an jeder Stelle übereinstimmt mit dem Pfeile der magnetischen Achse des Elementarmagneten, den man zum Aufsuchen der Kraftlinien verwendet.

Aufg. 145. Fertige eine Skizze an, welche den Kraftfluß in einem magnetischen Felde veranschaulicht, das a) von einem geradlinigen Strome, b) von einem Kreisstrome, c) von zwei benachbarten parallelen geradlinigen Strömen von gleicher und d) von entgegengesetzter Richtung hervorgebracht wird.

207. Was von dem magnetischen Felde gesagt wurde, das von einem elektrischen Strome hervorgebracht wird, gilt auch von demjenigen, welches von einem Magneten selbst herrührt, wie daraus hervorgeht, daß der Magnetismus auf elektrischen Strömen beruht.

Die Kraftlinien eines Magneten verlaufen außerhalb der magnetischen Masse vom Nordpole nach dem Südpole und innerhalb derselben umgekehrt, so daß sie im ganzen in sich zurücklaufende Linien bilden. Eine Vorstellung von dem ungefähren Verlaufe derselben giebt die Lösung von Aufg. 145 b). Der genaue Verlauf hängt im übrigen von der Gestalt des Magneten und von der Verteilung des magnetischen Momentes in seiner Masse ab.

208. Die vorstehenden Betrachtungen genügen indessen nicht, um eine genaue Vorstellung von der Einwirkung zu erhalten, welche die ganze Masse eines Magneten auf einen in seinem Inneren gelegenen und einen Teil desselben bildenden Elementarmagneten ausübt.

Man denke sich, um diesen Fall zu verfolgen, im Inneren des Magneten eine kleine Höhlung, in welcher der zu betrachtende Elementarmagnet liegt. Die Einwirkung, welche er von der ganzen übrigen Masse erfährt, hängt dann von der Gestalt dieser Höhlung ab. Wir betrachten zwei besonders wichtige Fälle: In beiden soll die Höhlung cylindrisch sein und die Achse des Cylinders in die Richtung der Magnetisierung fallen. Im ersten dagegen soll die Höhe des Cylinders sehr gering sein im Vergleiche zu den Quer-

schnittsdimensionen, d. h. die Gestalt soll eine scheibenförmige sein, während im zweiten Falle der Cylinder umgekehrt eine langgestreckte enge Röhre bilden soll.

In beiden Fällen haben wir besonders auf diejenigen Elementarmagneten der magnetischen Masse zu achten, welche dem in der Höhlung gelegenen Elementarmagneten zunächst liegen, weil der Einfluß derselben wegen der unmittelbaren Nachbarschaft überwiegt. Bei der scheibenförmigen Höhle sind dies die an den Grundflächen des Cylinders liegenden Elementarmagnete; sie suchen den in der Höhlung gelegenen parallel zur Achse der Magnetisierung zu stellen. Umgekehrt ist es bei der röhrenförmigen Höhle. Hier überwiegt der Einfluß der magnetischen Teile am Cylinderumfange in der Nachbarschaft des in der Höhlung liegenden Elementarmagneten und diese suchen den letzteren entgegengesetzt der Magnetisierungsrichtung einzustellen.

Zwischen diesen beiden Grenzfällen liegt der für einen einzelnen Elementarmagneten eines Magneten wirklich vorliegende. Durch eingehende Rechnung kann man beweisen und durch die Erfahrung findet man bestätigt, daß die in dem zweiten Grenzfalle beobachtete Wirkung die entgegengesetzte übertrifft. Es folgt daraus, daß eine weiche Eisenmasse, welche dem Einflusse äußerer magnetischer Kräfte entzogen ist, den Magnetismus, welchen sie etwa ursprünglich besaß, allmählich verlieren muß. Denn jeder einzelne Elementarmagnet derselben wird durch den Einfluß der vorbeschriebenen Kräfte aus der Magnetisierungsrichtung herausgedrängt.

Daß gehärteter Stahl seinen Magnetismus zum großen Teile bewahren kann, liegt nur daran, daß die einzelnen Elementarmagnete durch das härtere Gefüge an einer Drehung verhindert sind. Zugleich erklärt sich, daß man durch Erschütterungen, ebenso durch Erwärmen den permanenten Magnetismus verringern oder ganz beseitigen kann.

209. Induzierte Magnetisierung. Wenn eine weiche Eisenmasse in ein magnetisches Feld gebracht wird, werden die Elementarmagnete derselben durch die äußere magnetische Kraft gerichtet. Das Eisen wird dadurch selbst magnetisch und zwar nennt man es durch Induktion magnetisch.

Selbst das stärkste magnetische Feld vermag nicht alle Elementarmagnete gleich zu richten. In einem schwachen Felde werden nur wenige so eingestellt, daß das Eisen ein kleines magnetisches Moment in der Feldrichtung erhält. Der Grund hierfür liegt in dem in § 208 besprochenen Bestreben des Eisens, sich selbst wieder zu entmagnetisieren. In solchen schwachen Feldern ist darum, wie die Erfahrung lehrt, die Stärke der induzierten Magnetisierung der Feldstärke direkt proportional. Da beide Größen gleicher Art sind (Aufg. 143) ist ihr Verhältnis eine absolute Zahl; man nennt sie den magnetischen Induktionscoefficienten. Die Größe des letzteren ist nur von dem Stoffe abhängig; für weiches Eisen ist er etwa gleich 32, für alle übrigen Körper ist er ganz beträchtlich geringer (für die diamagnetischen Körper negativ).

Fig. 36a.

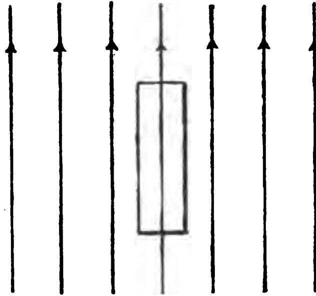
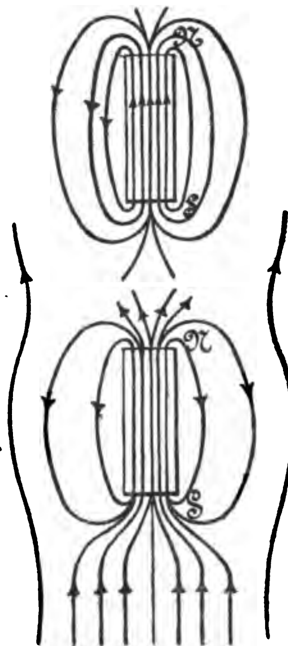


Fig. 36b.



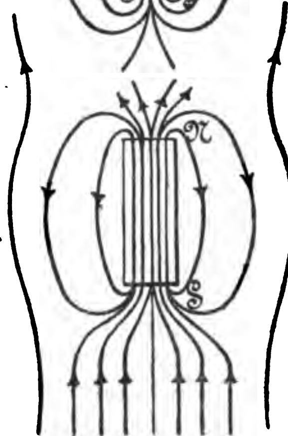


Fig. 36c.

Das in ein magnetisches Feld gebrachte Eisenstück bringt durch seine induzierte Magnetisierung selbst eine Veränderung des Feldes hervor, welche durch die Fig. 36 zur Anschauung gebracht wird. Fig. 36a zeigt die Kraftlinien des Feldes, so lange das Eisen unmagnetisch gedacht wird. Fig. 36b stellt das magnetische Feld dar, welches von dem induzierten Magnetismus des Eisens ohne Berücksichtigung des ursprünglichen Feldes hervorgebracht wird. Fig. 36c endlich giebt ein Bild von dem wirklich zustande kommenden magnetischen Felde,

das aus jenen beiden resultiert. (Vergl. Lehrsatz zur Übung § 204.)

Wenn das Eisenstück nur eine geringe Ausdehnung im Vergleiche zu dem ursprünglichen Felde besitzt, wird das letztere in größerem Abstande von dem Stücke nicht merklich geändert. Die Kraftlinien, welche in den Bereich des letzteren gelangen, werden dagegen umgebogen und gehen durch das Eisen.

Man kann daher sagen, daß das weiche Eisen die benachbarten Kraftlinien des magnetischen Feldes in sein Inneres hineinzieht.

In diesem Sinne spricht man von der magnetischen Leitungsfähigkeit eines Körpers. Der Kraftfluß wird nämlich durch die Anwesenheit des Eisenstückes in derselben Weise abgeändert wie die Strömungslinien einer Flüssigkeit (oder der Elektrizität), wenn ein Teil des Raumes einen wesentlich geringeren Reibungswiderstand der Bewegung entgegensetzt als der übrige Raum.

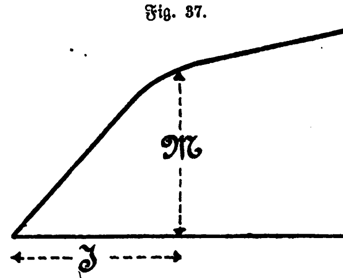
210. Elektromagnete. Wenn man auf einen Cylinder einen Draht aufwickelt und durch die so entstandene Spule einen elektrischen Strom sendet, so entsteht ein magnetisches Feld, das man als die Resultierende der einzelnen Felder ansehen kann, welche von den Kreisströmen herrühren, aus denen sich die durchströmte Spule (das Solenoid) zusammensetzt. Dieses magnetische Feld entspricht genau demjenigen, welches von einem gleichmäßig magnetisierten Stahlmagneten hervorgebracht wird, dessen magnetisches Moment gleich dem Produkte aus der Stromstärke und der Summe der Flächeninhalte aller jener Kreisströme ist, wenn er den Hohlraum der Spule einnehmen würde.

Füllt man dagegen den Hohlraum der Spule mit weichem Eisen aus, so wird dieses von dem magnetischen Felde des Solenoids durch Induktion magnetisiert. So lange man sich dem Sättigungspunkte des Eisens (d. h. jenem Zustande des letzteren, in welchem nahezu alle Elementarmagnete in die gleiche Richtung eingestellt sind) noch nicht sehr genähert hat, wird dadurch das magnetische Feld im Verhältnisse des Induktionscoeffizienten verstärkt. Der Elektromagnet hat daher etwa das 32fache magnetische Moment von demjenigen der Spule ohne Eisenkern. Zugleich ergiebt sich, daß unter diesen Umständen die Stärke der Magne-

tisierung, das magnetische Moment und alle magnetischen Kräfte des Elektromagneten der Stromstärke und der Zahl der Windungen direkt proportional sind.

211. Die Stärke der Magnetisierung und alle davon abhängigen Größen sind dagegen der Stromstärke nicht mehr direkt proportional, sobald die erstere einmal eine gewisse Grenze überschritten hat. Aus Versuchen ergiebt sich, daß für einen Elektromagneten der Magnetismus mit der Stromstärke in der Weise anwächst, wie es Fig. 37 angiebt.

Fig. 37.



Nach Fröhlich läßt sich dieser Zusammenhang durch die Formel

$$M = a \cdot \frac{J}{1 + bJ}$$

zur Darstellung bringen, worin a und b Konstanten sind, welche für jeden einzelnen Elektromagneten durch Versuche bestimmt werden müssen. So lange J klein ist, verschwindet der Wert bJ gegen 1 und der Magnetismus wächst nahezu proportional J. Dagegen nimmt der Magnetismus nicht mehr merklich zu, wenn J schon so groß geworden ist, daß bJ viel größer als 1 ist. Er nähert sich dann langsam seinem Maximalwerte $\frac{a}{b}$.

In den dynamoelektrischen Maschinen muß man aus Sparsamkeitsgründen bestrebt sein, einmal die Eisenkerne der Elektromagnete, welche ein verlangtes magnetisches Feld hervorbringen sollen, nicht zu umfangreich zu machen, d. h. also den Magnetismus des weichen Eisens möglichst auszunutzen. Gleichzeitig kommt aber das andere Bestreben hinzu, zur Hervorbringung des magnetischen Feldes nicht zu viel Stromenergie aufzuwenden. Man beansprucht daher die Elektromagneten dieser Maschinen meistens bis zu dem Punkte, welcher dem Beginne des Kniees in Fig. 37 entspricht.

212. Die Kraftlinien lassen sich noch dazu verwenden, um ein schönes Bild von der Wirkungsweise der elektrodynamischen oder magnetischen Kräfte zwischen zwei Körpern zu geben, von denen sie hervorgerufen sind. Man kann dies ausdrücken indem man sagt, jede Kraftlinie suche sich zusammenzuziehen und je zwei derselben

suchen sich gegenseitig abzustoßen. Man nimmt also an, daß im magnetischen Felde ein Zwang herrsche, welcher in der Richtung der Kraftlinien in einem Zuge und senkrecht dazu in einem Drucke bestehe. Liegen nun die Kraftlinien zwischen zwei Körpern dichter zusammen als sonst im Raume, so bewirkt die Abstoßung der Kraftlinien eine Entfernung der Körper und umgekehrt im entgegengesetzten Falle.

Vorläufig lassen sich diese Beziehungen indessen nur als ein Mittel zur besseren Veranschaulichung von Kraftwirkungen betrachten, die schon anderweitig bekannt sind.

Viertes Kapitel.

Die Elektrizität in ungleichförmiger Bewegung. Induktion.

213. Nach § 161, 4 sehen wir die Elektrizität als einen Stoff an, für den das Gesetz der Trägheit ebenso wie für jeden anderen Stoff, an dem Kräfte zu wirken vermögen, giltig ist. Wir müssen daher annehmen, daß ein elektrischer Strom nicht plötzlich zustande kommen oder verschwinden kann, sondern daß eine gewisse Zeit vergeht, bis sich ein neuer Gleichgewichtszustand der elektrischen Kräfte durch Hinzukommen bezw. Wegfallen der Reibungen in den Leitern ausgebildet hat.

In der That beobachten wir, wenn wir den Stromkreis einer Batterie schließen, ein allmähliches Anwachsen des Stromes und ebenso beim Öffnen eine plötzliche Erhöhung der elektrischen Kräfte, welche die Bildung des Öffnungsfunkens veranlaßt. Obschon aber beide Erscheinungen solcher Art sind, wie wir sie nach dem Gesetze der Trägheit zu erwarten hätten, hat sich doch herausgestellt, daß sie zum weitaus überwiegenden Teile keineswegs auf Rechnung desselben gestellt werden dürfen. Genaue Versuche haben vielmehr bewiesen, daß der Einfluß der Trägheit auf diese Erscheinungen so weit hinter einem anderen Umstande zurücktritt, der jetzt näher erörtert werden soll, daß man ihn bisher gar nicht zu messen vermochte. Es erklärt sich dies aus der äußerst geringen Masse,

welche wir dem neutralen elektrischen Fluidum zuzuschreiben haben. Die lebendige Kraft des elektrischen Stromes ist infolge dessen so klein, daß sie sich neben den viel größeren Arbeitswerten der anderen Energieformen, welche beim Strome auftreten, der Beobachtung ganz entzieht.

214. Im vorhergehenden Kapitel ist eine Beschreibung von dem magnetischen Felde gegeben worden, das einen elektrischen Strom umgiebt. Der Raum, den das magnetische Feld einnimmt, ist aber selbst von neutraler Elektrizität (vom Lichtäther) ausgefüllt. Alle Erscheinungen weisen uns darauf hin, daß letztere im magnetischen Felde in einen eigentümlichen Zwangszustand versetzt wird, welcher indessen von demjenigen im elektrostatischen Felde (welcher einfacherer Art ist) wesentlich verschieden ist. Jedenfalls hängt derselbe mit der Verteilung der Kraftlinien zusammen. Von Maxwell ist eine eingehende Theorie dieser elastischen Verschiebungen des Äthers und der daraus hervorgehenden Kräfte im magnetischen Felde ausgearbeitet und das Licht selbst als eine magnetische Welle im Äther erklärt worden. Es kann indessen noch nicht als sicher feststehend betrachtet werden, ob diese Lehre in allen Punkten der Wirklichkeit entspricht.

Wie dieser Zwangszustand im magnetischen Felde aber auch beschaffen sein möge, jedenfalls wird zur Herstellung desselben eine gewisse Energie verbraucht. Die Energie, welche zur Schaffung des magnetischen Feldes beim Schließen eines Stromkreises verbraucht wird, ist aber weit größer als die lebendige Kraft des Stromes, welche gleichzeitig ebenfalls neu geschaffen wird, und in dem gleichzeitigen Auftreten beider Energiearten liegt es, daß die viel kleinere unter ihnen durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler des gesamten Energieaufwandes verdeckt wird.

Um sich das klarer zu machen, nehme man an, daß es möglich sei, an einem Eisenbahnwagen einen Mechanismus anzubringen, durch den etwa eine Feder gespannt wird, so daß sich eine gewisse Geschwindigkeit des Wagens nur mit einem bestimmten Hube der Feder verträgt. Die Verbindung sei dabei in solcher Weise zwangläufig, daß jede Geschwindigkeitsänderung und die entsprechende Änderung im Hube der Feder sich gegenseitig bedingen. Um den Eisenbahnwagen zu beschleunigen muß man dann außer der Kraft, welche durch die Masse des Wagens bedingt ist, noch eine weitere zur Ver-

änderung des Hubes der Feder aufwenden. Der gesamte Energieinhalt des Wagens besteht dann aus der lebendigen Kraft desselben und der in der Feder angesammelten potentiellen Energie, welche jeden Augenblick bereit ist, sich ganz oder teilweise in kinetische Energie zurückzuverwandeln. Die potentielle Energie der Feder kann hierbei viel größer als die kinetische Energie des Wagens gedacht werden. Sie wirkt so, als wenn die letztere sehr vergrößert wäre. Es könnte dabei wohl sein, daß wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler beim Messen der scheinbaren kinetischen Energie die wahre kinetische Energie neben derjenigen, welche durch die Umwandlung der in der gespannten Feder enthaltenen potentiellen Energie entsteht, gar nicht zu bemerken wäre.

Man hat damit ein klares Bild von den Verhältnissen, welche beim elektrischen Strome vorliegen, gewonnen. Allerdings ist es kaum möglich, einen Apparat, wie wir ihn uns eben dachten, mit den gewöhnlichen mechanischen Hilfsmitteln wirklich herzustellen. Dagegen sieht man sofort, daß dies beim elektrischen Strome gar keine Schwierigkeit hat. Jeder elektrische Strom, welcher einen Magneten ablenkt, bietet dafür ein Beispiel. Man muß nur beachten, daß auch dann, wenn ein Magnet gar nicht in der Nähe ist, ein Zwangszustand im magnetischen Felde des Stromes geschaffen wird, welcher sich in jeder Hinsicht mit dem Anspannen einer Feder vergleichen läßt.

215. Potentielle Energie des magnetischen Feldes. Wir betrachten zunächst den Fall, daß das magnetische Feld durch einen einzigen geschlossenen Strom hervorgebracht wird. Wenn der Vergleich der Energie des magnetischen Feldes mit derjenigen einer gespannten Feder zutreffend sein soll, muß diese Energie proportional dem Quadrate der Stromstärke gesetzt werden können, denn auch die letztgenannte wächst mit dem Quadrate der Formänderung oder der erreichten Spannung.

Die Erfahrung bestätigt dies; bezeichnen wir die potentielle Energie des magnetischen Feldes mit P und die Stromstärke mit J, so können wir demnach setzen

$$P = \tfrac{1}{2} c \cdot J^2,$$

worin die Größe c nur noch von der geometrischen Gestalt des Stromleiters abhängig ist. Sie heißt der Selbstinduktionscoeffizient des Stromkreises. Wenn man auf die früher festgestellten Dimensionen von J und P achtet, ergiebt sich, daß c im elektromagnetischen Maßsysteme die Dimension einer Länge hat.

Die Länge c hängt aber viel weniger von der gesamten Länge des Leiterkreises, als von der Gestalt des letztern ab. Ihren größten

Wert nimmt sie, wenn jene gegeben ist, dann an, wenn der Draht in eine Spule aufgewickelt wird. Eine Erklärung hierfür ergiebt sich leicht daraus, daß im letzteren Falle ein weit stärkeres magnetisches Feld geschaffen wird, dessen Energie mit dem Quadrate der Feldstärke anwächst.

Das magnetische Feld, welches von zwei benachbarten Stromkreisen hervorgebracht wird, ergiebt sich durch graphische Summierung der Einzelfeldstärken. Dagegen ist die Energie desselben nicht etwa gleich der Summe der Einzelenergien. Die Arbeit, welche erforderlich ist, um neue Verschiebungen hervorzubringen, ist nämlich von dem bereits vorher bestehenden Zwangszustande abhängig; gerade so wie die Arbeit, welche erforderlich ist, um eine Feder um ein gegebenes Stück zusammenzudrücken, von dem vorher schon bestehenden Spannungszustande derselben abhängig ist. Durch diese Überlegung gelangen wir für die potentielle Energie zu dem Ausdrucke

$$P = \tfrac{1}{2} c_1 J_1^2 + c_{1,2} J_1 J_2 + \tfrac{1}{2} c_2 J_2^2.$$

Das erste Glied desselben stellt die durch den Strom J_1 allein bedingte Energie, das letzte Glied die von J_2 allein herrührende dar; das zweite Glied kommt zu der Summe jener hinzu und ist jeder Stromstärke proportional. Der Coeffizient $c_{1,2}$ hängt nur von der Gestalt und gegenseitigen Lage beider Stromkreise ab und wird der **Induktionscoeffizient** beider Stromkreise auf einander genannt.

In gleicher Weise läßt sich der Ausdruck für die potentielle Energie des magnetischen Feldes anschreiben, wenn drei oder mehr Stromkreise gegeben sind. Kommen Magnete mit vor, so läßt sich dies in derselben Weise ausführen, wenn man sich dieselben durch die ihnen entsprechenden Ströme ersetzt denkt.

216. Wir kehren jetzt zu dem Falle zurück, daß ein einziger Stromkreis gegeben ist, der vorher geöffnet war und nun plötzlich geschlossen wird. Der Strom wächst allmählich an; nach t Sekunden (wo indessen unter t ein sehr kleiner Bruch verstanden werden soll, weil sich der betrachtete Vorgang in sehr kurzer Zeit abspielt) soll die Stromstärke gleich J und die Zunahme in dem darauf folgenden Zeitteilchen Δt gleich ΔJ sein. Wenn die elektromotorische Kraft

der in den Stromkreis eingeschalteten Batterie mit E bezeichnet wird, ist die Arbeitsleistung, welche durch dieselbe in Δt hervorgerufen wird, da $J\Delta t$ elektrische Einheiten durch jeden Querschnitt fließen, gleich $E \cdot J\Delta t$. Von dieser Arbeitsleistung wird der Betrag $J^2 R \cdot \Delta t$ (R = Widerstand) zur Überwindung der Stromreibung verbraucht. Der Unterschied

$$(EJ - J^2 R)\,\Delta t$$

bleibt daher verfügbar und dient zur Erhöhung der kinetischen Energie des Stromes und der potentiellen Energie seines magnetischen Feldes. Da die letztere weitaus überwiegt, brauchen wir nur auf diese zu achten und erhalten

$$(EJ - J^2 R)\,\Delta t = \tfrac{1}{2} c \left((J + \Delta J)^2 - J^2\right).$$

Wenn Δt sehr klein angenommen wird, ist auch ΔJ sehr klein gegen J und wir können es neben diesem vernachlässigen. Wir erhalten daher

$$E - JR = c \cdot \frac{\Delta J}{\Delta t}.$$

Die Stromstärke J ist (§ 183) der Geschwindigkeit v des neutralen Fluidums proportional. Der Quotient $\frac{\Delta J}{\Delta t}$ ist daher der Beschleunigung $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ des neutralen Fluidums proportional. Wir wollen ihn daher die Strombeschleunigung nennen und dafür den Buchstaben G setzen. Unter der Strombeschleunigung ist also die Zunahme zu verstehen, welche der Strom in einer Sekunde erfahren würde, wenn das Anwachsen während dieser Zeit in derselben Weise fortginge, wie in dem betrachteten Augenblicke.

Die Gleichung

$$E - JR = cG$$

liefert nach J aufgelöst

$$J = \frac{E - cG}{R}.$$

Mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung läßt sich hieraus das Gesetz für das Anwachsen von J in der Zeit leicht bestimmen. Hier kommt es uns aber nicht darauf, sondern auf die Deutung an, welche man der letzten Gleichung geben kann. Wie man sieht

hat sie die Form des Ohm'schen Gesetzes, nur daß an Stelle von E hier $E - cG$ im Zähler des Bruches steht. Man kann also sagen, daß der Strom J in jedem Augenblicke so groß ist, wie er in dem betrachteten Stromkreise dauernd zustande käme, wenn an Stelle der elektromotorischen Kraft E die elektromotorische Kraft $E - cG$ gesetzt würde. Das Produkt cG wird hierbei selbst als eine elektromotorische Kraft aufgefaßt (es hat auch die Dimensionen einer solchen) und wird die elektromotorische Kraft der Induktion genannt.

Die soeben durchgeführte Betrachtung läßt sich leicht für den Fall wiederholen, daß in den Stromkreis allmählich ein größerer Widerstand eingeschaltet wird, der bis auf einen unendlich großen Wert anwachsen kann, welcher dem vollständigen Öffnen entspricht. An die Stelle der Strombeschleunigung tritt hier eine Stromverzögerung und diesem Zeichenwechsel entspricht auch eine Umkehrung in der Richtung der elektromotorischen Kraft der Induktion, welche in diesem Falle sich zu E addiert.

Während des Öffnens eines Stromkreises ist in jedem Augenblicke die Stromstärke größer, als sie dem Ohm'schen Gesetze für den betreffenden Widerstand und die elektromotorische Kraft der Batterie entsprechen würde. Der Überschuß heißt der Extrastrom; er ist durch die elektromotorische Kraft der Induktion veranlaßt und stellt die wieder in kinetische Stromenergie umgesetzte potentielle Energie des magnetischen Feldes dar.

217. Es seien jetzt zwei Stromkreise gegeben, für welche wir die Bezeichnungen des § 215 zur Anwendung bringen, während die Strombeschleunigungen G_1 und G_2 heißen sollen. Die Änderung der potentiellen Energie des magnetischen Feldes im Zeitteilchen Δt ist

$$\tfrac{1}{2}c_1\left((J_1 + \Delta J_1)^2 - J_1^2\right) + c_{1,2}\left((J_1 + \Delta J_1)(J_2 + \Delta J_2) - J_1 J_2\right) + \tfrac{1}{2}c_2\left((J_2 + \Delta J_2)^2 - J_2^2\right),$$

wofür unter der Voraussetzung sehr kleiner Stromänderungen

$$c_1 J_1 \Delta J_1 + c_{1,2} J_1 \Delta J_2 + c_{1,2} J_2 \Delta J_1 + c_2 J_2 \Delta J_2$$

gesetzt werden kann.

Diese Zunahme der potentiellen Energie erfolgt auf Kosten der Überschüsse der in beiden Stromkreisen geleisteten Arbeiten über die von den Stromreibungen verbrauchten, d. h. sie ist gleich

$$(E_1 J_1 - J_1^2 R_1) \Delta t + (E_2 J_2 - J_2^2 R_2) \Delta t,$$

woraus die Gleichung folgt:

$$J_1 (E_1 - J_1 R_1 - c_1 G_1 - c_{1,2} G_2) + J_2 (E_2 - J_2 R_2 - c_{1,2} G_1 - c_2 G_2) = 0.$$

Man kann sich diese Gleichung dazu benutzt denken, eine der Unbekannten, etwa G_1 zu berechnen, wenn alle übrigen gegeben sind. Wir wissen aber, daß G_1 von der Stromstärke J_2 selbst nicht abhängen kann, da nicht das von J_2 herrührende magnetische Feld, sondern nur die Änderung desselben von Einfluß auf den Stromverlauf in dem ersten Leiterkreise ist. Wir können also zur Ermittelung von G_1 den Strom J_2 auch gleich Null setzen und erkennen daraus, daß die Gleichung in die beiden

$$E_1 - J_1 R_1 - c_1 G_1 - c_{1,2} G_2 = 0,$$
$$E_2 - J_2 R_2 - c_{1,2} G_1 - c_2 G_2 = 0$$

zerfällt. Aus der ersten ergiebt sich

$$J_1 = \frac{E_1 - c_1 G_1 - c_{1,2} G_2}{R_1},$$

d. h. der Strom kann in jedem Augenblicke nach dem Ohm'schen Gesetze bestimmt werden, wenn an Stelle der elektromotorischen Kraft E der Wert $E_1 - c_1 G_1 - c_{1,2} G_2$ gesetzt wird. Das zweite Glied haben wir bereits als die elektromotorische Kraft der Selbstinduktion kennen gelernt; das dritte Glied des Ausdrucks stellt die elektromotorische Kraft der Induktion des zweiten Stromkreises auf den ersten dar.

Wir sind damit zu dem Satze gelangt:

Die elektromotorische Kraft der Induktion ist gleich dem Produkte aus der Strombeschleunigung des induzierenden Stromes und dem Induktionscoeffizienten des induzierenden Stromkreises auf den induzierten. Sie ist negativ, wenn beide Faktoren positiv sind.

218. Induktion kommt indessen nicht nur durch die Strombeschleunigungen der auf einander wirkenden Ströme, sondern auch

durch Änderungen in der Gestalt und gegenseitigen Lage der Stromleiter, d. h. durch Änderung der Induktionscoeffizienten zustande. Auch hier läßt sich die Betrachtung in der früheren Weise durchführen, indem man von der potentiellen Energie des magnetischen Feldes ausgeht. Man muß dabei nur beachten, daß bei diesen Lagenänderungen zugleich die von den elektrodynamischen Kräften geleisteten Arbeiten in Rechnung zu ziehen sind.

Man nehme etwa an, daß ein Stromkreis 1 fest und ein zweiter beweglich sei; der letztere sei in zwei verschiedenen Lagen 2 und 3 betrachtet. Die potentielle Energie des magnetischen Feldes vor der Verschiebung sei mit $P_{1,2}$, diejenige nach der Verschiebung, wenn der stationäre Zustand wieder eingetreten ist, mit $P_{1,3}$ und die bei der Verschiebung von den elektrodynamischen Kräften geleistete Arbeit mit A bezeichnet. Dann ist $P_{1,2} - P_{1,3} - A$ die in elektrischen Strom auf dem Wege der Induktion umgesetzte Energie. Der Betrag ist stets derselbe, wie auch die Bewegung aus der Lage 2 in die Lage 3 erfolgen möge. Daraus geht hervor, daß auch die gesamte Elektrizitätsmenge, welche infolge der Induktion durch jeden Querschnitt fließt (der sogen. Integralstrom), von der Geschwindigkeit der Bewegung unabhängig ist. Je schneller die Bewegung erfolgt, desto größer muß allerdings, um denselben Integralstrom hervorzubringen, die Stromstärke in jedem Augenblicke sein. Daraus folgt, daß die elektromotorische Kraft der Induktion in jedem Augenblicke der Geschwindigkeit der Bewegung proportional ist.

Die genaue Verfolgung dieser Beziehungen ist ohne höhere mathematische Hilfsmittel nicht möglich. Dagegen kann man eine sehr schöne Darstellung der Induktionsgesetze mit Hilfe der Kraftlinien geben. Allerdings muß dieselbe hier ohne Beweis gegeben werden, da der letztere ebenfalls auf Betrachtungen beruht, welche zu schwierig sind, um sie in einem elementaren Lehrbuche durchführen zu können.

219. Das magnetische Feld eines elektrischen Stromes ist von derselben Art, wie dasjenige einer magnetischen Schale, deren Ränder durch den Umfang des Stromkreises gebildet werden (Aufg. 141). Die Fläche dieser Schale sei die vom Strome

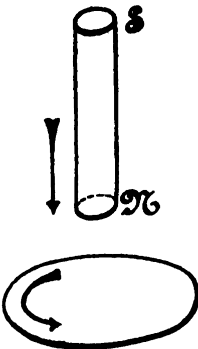
umschlossene Fläche genannt. Ist der Stromleiter in eine Spule aufgewickelt, so kann jeder Umlauf durch eine Schale ersetzt gedacht werden und die vom Strome umschlossene Fläche ist gleich der Summe der Einzelflächen aller Windungen.

Wir denken uns die Kraftlinien des magnetischen Feldes so verzeichnet, daß die Stärke des letzteren überall durch die Dichte der Kraftlinien zur Darstellung gebracht wird (§ 205). Die Anzahl der Kraftlinien, welche durch die vom Strome durchflossene Fläche geht, sei mit N bezeichnet. Bei der Feststellung von N muß auf den Pfeil der Kraftlinien geachtet werden. Durchschneiden nicht alle Kraftlinien die Fläche in demselben Sinne, so sollen die im entgegengesetzten Sinne gehenden Kraftlinien auch mit entgegengesetztem Vorzeichen gezählt werden. N kann daher auch negativ sein.

Alle Fälle der Induktion werden nun erschöpfend durch den einen Satz wiedergegeben:

Induktion tritt in einem Stromkreise stets dann auf, wenn sich die Zahl N der Kraftlinien ändert; die elektromotorische Kraft der Induktion ist in jedem Augenblicke proportional der Änderung der Kraftlinienzahl. Sie bringt einen Induktionsstrom hervor, welcher im Sinne des Uhrzeigers herumgeht, wenn man sich auf die Seite stellt, nach welcher die positiven Kraftlinien hinzeigen, sobald die Zahl der Kraftlinien zunimmt und umgekehrt.

Fig. 38.



Der Umlaufssinn läßt sich auch dadurch festsetzen, daß man sagt, die Kraftlinien des Induktionsstroms sind entgegengesetzt gerichtet den Kraftlinien, durch deren Hinzukommen die Induktion bedingt ist. (Vgl. Fig. 38.)

Der vorstehende Satz umfaßt alle Fälle der Induktion, da es völlig gleichgiltig ist, durch welche besonderen Umstände die Zahl der Kraftlinien sich ändert. Dies kann geschehen durch Änderung der Stromstärke in dem Stromkreise, den wir betrachten (Selbstinduktion) oder in einem anderen Stromkreise oder durch Gestaltänderung oder Bewegung

des betreffenden oder eines zweiten Stromkreises oder eines Magneten oder schließlich durch Entstehen oder Verschwinden des Magnetismus in einem weichen magnetischen Körper.

220. Die Induktion ist das mächtigste Hilfsmittel, das uns zur Erzeugung elektrischer Ströme zu Gebote steht. Sie gestattet, mechanische Arbeit unmittelbar und mit geringen Verlusten in Stromenergie umzuwandeln und umgekehrt. Ebenso kann mit ihrer Hilfe die Stromenergie eines Stromkreises auf einen anderen benachbarten mit Verlusten, die zuweilen nur wenige Prozente betragen, übertragen werden. (Induktoren, Transformatoren.)

Der Hauptbestandteil eines Induktionsstromerzeugers besteht stets aus einer oder mehreren Spulen, deren Inneres gewöhnlich durch einen Eisenkern ausgefüllt ist. Man erzielt durch das Aufwinden des Drahtes in eine Rolle eine große vom Strome umflossene Fläche. Durch diese Fläche läßt man die Kraftlinien des magnetischen Feldes gehen. Das letztere wird entweder durch permanente Magnete oder (gewöhnlich) durch Elektromagnete hervorgebracht. Der Eisenkern in der Spule hat den Zweck, die Kraftlinien des magnetischen Feldes möglichst zusammenzuziehen und durch das Spuleninnere zu leiten.

Hat man es durch diese Anordung des Apparates dahin gebracht, daß eine große Zahl von Kraftlinien durch die wirksame Fläche der Spule geht, so bleibt nur noch übrig, diese Zahl zu ändern, um eine elektromotorische Kraft in der Spule zu erhalten. Dies kann entweder geschehen durch Änderung des magnetischen Feldes selbst (Induktor, Transformator) oder durch Bewegung der Spule im magnetischen Felde, während dieses unverändert bleibt (gewöhnliche Anordnung der Dynamomaschine). Zur Hervorbringung der Bewegung bezw. zur Überwindung der elektrodynamischen Kräfte muß mechanische Arbeit aufgewendet werden. Diese ist es, welche vermittelst der Induktion in Stromenergie umgewandelt wird.

Man sieht unmittelbar, daß bei dauerndem Gange der Maschine die elektromotorische Kraft in der Spule periodisch ihre Richtung ändern muß, denn die Zahl der Kraftlinien kann nicht fortwährend zu- oder abnehmen, sie muß vielmehr zwischen zwei Grenzwerten

hin- und herschwanken, wenn sie sich dauernd ändern soll. Im Innern der stromerzeugenden Spule wird daher bei jedem Induktionsstromerzeuger ein Wechselstrom hervorgerufen, d. h. ein elektrischer Strom, welcher in regelmäßigen Zeiträumen die Richtung wechselt.

Bei den Induktoren und Transformatoren wird überdies zur Änderung des magnetischen Feldes ein periodisch veränderlicher Strom gebraucht und insbesondere bei den letzteren stets ein Wechselstrom angewendet. Dieser das magnetische Feld erregende heißt der primäre, der davon induzierte Wechselstrom heißt der sekundäre. Der letztere fließt zwischen den beiden Klemmen der stromerzeugenden Spule durch einen äußeren Widerstand. Zwischen dem primären und sekundären Wechselstrome besteht die Beziehung, daß die Energie, welche zur Bildung des letzteren erforderlich ist, also das Produkt aus der elektromotorischen Kraft und der Stromstärke, stets (wenn auch nur wenig) kleiner ist als die Energie des primären Stromes. Man kann daher die Wickelung entweder so einrichten, daß der sekundäre Strom weit schwächer ist als der primäre, aber mit großer elektromotorischer Kraft durch einen bedeutenden Widerstand fließt (Induktor), oder so, daß der sekundäre Strom stärker ist als der primäre, aber mit kleiner elektromotorischer Kraft durch einen geringen Widerstand fließt (Sekundärgenerator oder Transformator).

221. Gehört die stromerzeugende Spule zu einer Dynamomaschine, so muß der äußere Widerstand, welcher mit ihr zusammen einen Stromkreis bildet, durch Gleitstellen mit den Enden der Spule verbunden sein, um der letzteren die Bewegung durch das magnetische Feld zu gestatten.

Die konstruktiven Anordnungen, welche in dieser Hinsicht möglich sind, sind sehr mannigfaltig. Dasselbe gilt von der Anordnung der stromerzeugenden Spulen im Magnetfelde und von der Verbindung der letzteren unter einander.

Man hat indessen zwei Hauptfälle zu unterscheiden jenachdem nämlich die Verbindungen so getroffen sind, daß die Spulenenden mit dem äußeren Widerstande während des Hin- und Herganges des Spulenwechselstroms in gleicher oder in entgegengesetzter

Reihenfolge verbunden sind. Im ersten Falle kehrt auch in der äußeren Stromleitung der induzierte Strom abwechselnd die Richtung um, im zweiten Falle erhalten wir in dieser einen Strom gleicher Richtung. Die Maschinen werden hiernach in Wechselstrom- und Gleichstrommaschinen unterschieden.

222. Der Maschinenteil, welcher die stromerzeugenden Spulen trägt, heißt der Anker der Dynamomaschine. Die einzige Bewegung, welche man mit Vorteil für den Anker anwenden kann, ist eine gleichförmige Rotation. Der Anker wird daher auch selbst im wesentlichen als Rotationskörper gestaltet, der von den Feldmagneten eng umschlossen wird. Die wichtigsten Ankerformen sind der Ringanker und der Trommelanker. Bei dem ersteren sind die einzelnen Windungen von der Gestalt des Ringquerschnitts (gewöhnlich kreisförmig oder rechteckig) abhängig, bei dem letzteren entsprechen sie Achsenschnitten des Cylinders oder der Trommel, sind also rechteckig.

Die Berechnung der Stromverteilung in der Dynamomaschine erfolgt in der Weise, daß man den Anker in irgend einer Lage ruhend betrachtet und sich in jede Spule eine elektromotorische Kraft (etwa vermittelst eines galvanischen Elements) eingeschaltet denkt, welche derjenigen der Induktion gleich ist. Diese elektromotorische Kraft ist proportional der Feldstärke und der Umdrehungsgeschwindigkeit und hängt im übrigen von der augenblicklichen Lage der betrachteten Spule im Magnetfelde ab. Man findet., daß die elektromotorischen Kräfte teils hintereinander, teils nebeneinander geschaltet sind und berechnet die auftretenden Ströme nach den für die Stromverzweigungen giltigen Gesetzen.

223. Eine besondere Eigentümlichkeit der Dynamomaschine besteht darin, daß der von ihr erzeugte Strom selbst zur Bildung ihres magnetischen Feldes verwendet wird. In dieser Hinsicht sind die Maschinen mit Hintereinanderschaltung, die mit Nebenschlußschaltung und die Maschinen mit gemischter Wickelung oder Verbundmaschinen zu unterscheiden.

Wir betrachten zuerst die Maschinen mit Hintereinanderschaltung oder direkter Schaltung. Es sind diejenigen, welche außerhalb des Ankers keine Stromverzweigung haben, so daß der

ganze von der Maschine gelieferte Strom um die Feldmagnete geht. Wir setzen die elektromotorische Kraft E

$$E = K \cdot n \cdot M,$$

wo K eine von der Gestalt des Ankers und der Feldmagnete abhängige Konstante der Maschine, n die Umdrehungsgeschwindigkeit und M eine von der Stärke des Magnetfeldes abhängige Größe bedeutet. Nach § 211 kann

$$M = a \cdot \frac{J}{1 + bJ}$$

gesetzt werden. Nach dem Ohm'schen Gesetze ist ferner, wenn R den Widerstand des ganzen Stromkreises (äußerer Widerstand plus Ankerwiderstand) bedeutet,

$$E = J \cdot R.$$

Lösen wir diese Gleichungen nach J auf, so erhalten wir

$$J = \frac{nKa - R}{Rb}.$$

Allerdings gilt die Formel für M und daher die für J abgeleitete nur näherungsweise. Man kann daher nur ein ungefähres Urteil über das Verhalten der Maschine aus derselben gewinnen. Dies zeigt sich schon darin, daß man für ein kleines n zu einem negativen Werte von J geführt wird, eine Lösung, welche der Natur der Sache nach zu verwerfen ist. Für

$$n_0 = \frac{R}{Ka}$$

wird $J = 0$. Erst für größere Umdrehungszahlen als n_0 wird die Formel brauchbar.

Indessen zeigt die Rechnung deutlich, daß eine Grenze für die Umlaufsgeschwindigkeit der Maschine besteht, unterhalb deren gar kein merklicher Strom zustande kommt. Die Zahl dieser sogen. toten Touren ist ungefähr gleich n_0 und wie man sieht unter sonst gleichen Umständen dem Widerstande R proportional. Sie nimmt ab mit der Größe der Maschinen, da sowohl K als a mit letzterer anwachsen. Kleine Dynamomaschinen müssen daher stets schnell laufen (3000 und mehr Umdrehungen bei den kleinsten in der Minute); größere können langsamer laufen (80 und weniger Umdrehungen).

224. Vergrößert man den Widerstand im Stromkreise einer direkt geschalteten Maschine, so verringert sich nicht nur J sondern auch E, wie die oben durchgeführte Rechnung zeigt. Unter Umständen erlischt sogar der Strom nahezu vollständig, wenn nämlich R bis auf nKa anwächst.

Durch eine andere Schaltung läßt sich dem abhelfen. Bei den Nebenschlußmaschinen spaltet sich der aus den Spulen kommende Strom an den Polklemmen in zwei Zweige, von denen der eine um die Magnetschenkel, der andere durch den äußeren Widerstand fließt. Eine Vergrößerung des letzteren hat dann zunächst zur Folge, daß ein größerer Teil des Gesamtstromes um die Magnetschenkel fließt. Dadurch steigt aber der Magnetismus und die elektromotorische Kraft der Maschine, wenn die Umdrehungszahl ungeändert bleibt. Die Nebenschlußmaschine verhält sich also bei einer Veränderung des äußeren Widerstandes gerade umgekehrt wie die direkt geschaltete Maschine.

Die Verbundmaschine endlich hat zwei Wickelungen auf den Feldmagneten, von denen die eine (mit großem Querschnitte und kleiner Windungszahl) direkt, die andere (aus schwachem Drahte mit vielen Windungen) in den Nebenschluß geschaltet ist. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß das Verhalten der Verbundmaschine bei Widerstandsänderungen zwischen demjenigen der direkt geschalteten und der Nebenschlußmaschine liegt und daß man sich je nach dem Verhältnisse beider Wickelungen zu einander mehr der einen oder der anderen annähern kann.

Aufg. 146. Führe die in § 223 für die direkt geschaltete Maschine angestellte Rechnung a) für die Nebenschlußmaschine, b) für die Verbundmaschine durch.

Anl. z. L. Für die Nebenschlußmaschine haben wir vier Unbekannte zu bestimmen: die elektromotorische Kraft E, denjenigen Teil von E, welcher auf den äußeren Stromkreis kommt, d. h. die Potentialdifferenz der Polklemmen, die sogen. Klemmenspannung P und die Stromstärken im äußeren Widerstande und in der Magnetbewickelung. Drei Gleichungen liefert das Ohm'sche Gesetz; die vierte die Fröhlich'sche Formel in § 211. — Bei der Verbundmaschine muß der Magnetismus bestimmt werden, welcher durch das Zusammenwirken des Stromes J_a in der direkten und des Stromes J_m in der Nebenschlußwickelung erzeugt wird. Heißen die Windungszahlen n_a und n_m, so ist

$$M = a \cdot \frac{J_m + \frac{n_a}{n_m} J_a}{1 + b\left(J_m + \frac{n_a}{n_m} J_a\right)},$$

worin die Konstanten a und b von derselben Größe sind, als wenn nur eine Wickelung mit der Windungszahl n_m vorhanden wäre.

Aufg. 147. Welche Vorsicht muß beobachtet werden a) beim Laden von Accumulatoren durch Dynamomaschinen, b) bei der Parallelschaltung von Stromerzeugern? Wie gestalten sich die Verhältnisse bei der Parallelschaltung von Wechselstrommaschinen?

Tabellen.

a) Spezifische Wärme fester und flüssiger Körper.

Blei	0,0315	Eichenholz	0,570
Eisen	0,1124	Eis	0,504
Graphit	0,310	Gips	0,273
Kupfer	0,0933	Glas	0,098
Nickel	0,1092	Marmor	0,210
Platin	0,0323	Tannenholz	0,654
Quecksilber	0,0335	Ziegelsteine	0,241
Silber	0,0559	Wasser	1,000
Zink	0,0935	Terpentin	0,4106
Zinn	0,0559	Alkohol	0,55
Asche	0,200		

b) Spezifische Wärme und kritische Temperatur luftförmiger Körper.

	Spezif. Wärme bei konstantem Drucke.	Spezif. Wärme bei konstantem Vol.	Kritische Temperatur.
Atmosphärische Luft	0,2375	0,1685	—
Sauerstoff	0,2175	0,1551	— 118°
Stickstoff	0,2438	0,1727	— 146°
Wasserstoff	3,4090	2,4123	— 174°
Kohlensäure	0,2164	0,1535	+ 31°
Ammoniak	0,505	—	+ 131°
Schweflige Säure	0,154	—	+ 155°
Wasserdampf	0,475	0,334	+ 370°

c) Spannkraft gesättigter Wasserdämpfe.

Spannung in Atmosphären.	Temperatur in Celsiusgraden.	Gewicht des Dampfes in kgr pro cbm.	Volumen von 1 kgr Dampf in cbm.
0,1	45,6	0,066	15,032
0,5	80,9	0,303	3,297
1,0	100,0	0,582	1,717
1,5	111,4	0,852	1,174
2,0	119,6	1,116	0,896
2,5	126,7	1,376	0,727
3,0	132,8	1,633	0,612
3,5	138,1	1,888	0,530
4,0	142,8	2,140	0,467
4,5	147,1	2,390	0,418
5,0	151,0	2,641	0,379
5,5	154,6	2,886	0,346
6,0	157,9	3,132	0,319
6,5	161,1	3,376	0,296
7,0	164,0	3,619	0,276
7,5	166,8	3,861	0,259
8,0	169,5	4,103	0,244
8,5	172,0	4,344	0,230
9,0	174,4	4,583	0,218
9,5	176,7	4,822	0,207
10,0	178,9	5,061	0,198
15,0	197,2	7,402	0,135

---

d) Verbrennungswärmen.

	Cal. pro kgr.
Kohlenstoff zu Kohlensäure	8080
Kohlenstoff zu Kohlenoxydgas	2473
Kohlenoxydgas zu Kohlensäure	2403
Wasserstoff zu Wasserdampf	28 780
Wasserstoff zu flüssigem Wasser	34 180
Grubengas (CH_4) zu Kohlensäure und Wasserdampf	11 996
Leuchtgas	11—12 000
Petroleum	10 000
Alkohol	7184
Rüböl	9300

	Cal. pro kgr.	Erforderliche theoret. Luftmenge 0° in cbm.	Rauchgase in cbm, 300° C.
Lufttrockenes Holz	2820	3,5	8,8
Lufttrockener Torf	3550	4,0	10,0
Braunkohle	3600—5350	4,1—5,7	10,0—13,3
Steinkohle	6600—7760	7,0—8,0	15,6—17,7
Anthracit	8110	8,5	18,4
Cokes	7430	7,4	16,9
Holzkohle	7750	8,0	17,7

e) Spezifische elektrische Widerstände.

	Widerstand eines Würfels von 1 cm Seite in Mikrohm.	Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 mm Durchm., Ohm.
Silber, geglüht	1,52	0,019
Silber, gezogen	1,65	0,021
Kupfer, geglüht	1,62	0,020
Kupfer, gezogen	1,65	0,021
Gold, geglüht	2,08	0,026
Aluminium, geglüht	2,94	0,037
Zink, gepreßt	5,69	0,072
Platin, geglüht	9,16	0,117
Eisen, geglüht	9,82	0,125
Nickel, geglüht	12,60	0,160
Blei, gepreßt	19,85	0,253
Antimon, gepreßt	35,90	0,457
Wismuth, gepreßt	132,70	1,689
Quecksilber, flüssig	99,74	1,225
Neusilber	21,17	0,269
Kohle für Bogenlampen	3930	50

Schwefelsäure beim Maximum des Leitungsvermögens (30,4 %) Widerstand von 1 ccm	= 1,44 Ohm
Reines Wasser nach Kohlrausch	3,76 Megohm
Glimmer	$84 \cdot 10^6$ Megohm
Guttapercha	$450 \cdot 10^6$ "
Schellack	$9000 \cdot 10^6$ "
Ebonit	$28\,000 \cdot 10^6$ "
Paraffin	$34\,000 \cdot 10^6$ "
Glas (kühl)	größer als die vorhergehenden.

f) Dielektrizitätskonstanten.

Luft	1,0000	Flintglas	6,61—9,90
Vacuum	0,9985	Paraffin	1,85—2,47
Kohlensäure	1,0008	Ebonit	2,21—3,15
Wasserstoff	0,9998	Kautschuk	2,12—2,34
Schweflige Säure	1,0037	Petroleum	2,04—2,10
Spiegelglas	5,83—8,45	Rüböl	2,44—3,03
Crownglas	6,96		


89080439722
B89080439722A

